Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2022

Übungsblatt 1
Vektoren & Newtonsche Mechanik

Abgabe bis: 29.04.2022 um 12:00

Aufgabe 1: Koordinaten und Koordinatentransformationen

Wir betrachten die Koordinatentransformation von den kartesischen Koordinaten (x, y, z, t) zu neuen Koordinaten (q_1, q_2, q_3, t') definiert als

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right) \ ; \\ q_2 &= x \cdot y \ ; \\ q_3 &= z + v\,t \ ; \\ t' &= t - c \ , \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $c, v \in \mathbb{R}$ Konstanten sind.

(a) Sei O ein Beobachter, dessen Trajektorie in den neuen Koordinaten gegeben ist durch

$$q_1(t') = 0 \tag{2a}$$
$$q_2(t') = wt' \tag{2b}$$
$$q_3(t') = 0 \tag{2c}$$

Definiert O ein Inertialsystem, angenommen, dass das Koordinatensystem (x, y, z, t) ein Inertialsystem definiert?

(b) Skizzieren Sie die Kurven, die in der x-y Ebene durch $q_1 =$ Konstant und $q_2 =$ Konstant gegeben sind. (Diese sind Beispiele von Koordinatenflächen.)

(c) Es sei V ein zeit-unabhängiges Skalarfeld in den (x, y, z, t) Koordinaten gegeben durch

$$V(x, y, z) = V_0\left(x^2 - y^2\right) + V_1\, z \ , \tag{3}$$

wobei $V_0, V_1 > 0$ Konstanten sind. Berechne die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} \ ; \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} \ ; \quad \frac{\partial V}{\partial q_3}; \quad \frac{\partial V}{\partial t'} \ . \tag{4}$$

Hinweis. V kann dazu zunächst in den Koordinaten (q_1, q_2, q_3, t') ausgedrückt werden.

Aufgabe 2: Einfache Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind von großer Relevanz in der Klassischen Mechanik. Wir untersuchen hier Beispiele, die während des ganzes Semesters regelmässig vorkommen werden.

Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen $x(t)$ der folgenden Differenzialgleichungen, wobei $\dot{x} = dx/dt$ und $\ddot{x} = d^2x/dt^2$.

(a) Einfache Differenzialgleichung 1. Ordnung:

$$\dot{x} = \alpha x \ , \tag{7}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{C}$.

Beschreiben Sie die Bedeutung des Realteils und des Imaginärteils von α in Worten;

(b) Gedämpfter harmonischer Oszillator:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \ , \tag{8}$$

wobei $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$;

(c) Bewegungsgleichung für einen Spin im Magnetfeld:

$$\dot{x} = -\omega y; \qquad \dot{y} = \omega x \tag{9}$$

wobei $\omega \in \mathbb{R}$.

Hinweis. Vereinfachen Sie das Gleichungssystem auf eine Differenzialgleichung für x.