Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2022

Übungsblatt 1
Vektoren & Newtonsche Mechanik

Abgabe bis: 29.04.2022 um 12:00

Aufgabe 1: Koordinaten und Koordinatentransformationen

Wir betrachten die Koordinatentransformation von den kartesischen Koordinaten (x, y, z, t) zu neuen Koordinaten (q_1, q_2, q_3, t') definiert als

$$q_1 = \frac{1}{2}\big(x^2 - y^2\big) \; ; \tag{1a}$$
$$q_2 = x \cdot y \; ; \tag{1b}$$
$$q_3 = z + v\,t \; ; \tag{1c}$$
$$t' = t - c \; , \tag{1d}$$

wobei $c, v \in \mathbb{R}$ Konstanten sind.

(a) Sei O ein Beobachter, dessen Trajektorie in den neuen Koordinaten gegeben ist durch

$$q_1(t') = \frac{1}{2} \; ; \tag{2a}$$
$$q_2(t') = wt' \; ; \tag{2b}$$
$$q_3(t') = 0 \; , \tag{2c}$$

wobei $w \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Definiert O ein Inertialsystem, angenommen, dass das Koordinatensystem (x, y, z, t) ein Inertialsystem definiert?

Lösung: For a coordinate system attached to O to define an inertial frame, it must be the case that any object in uniform movement in O's frame must also be in uniform movement in the inertial (x, y, z, t) frame. In particular, O's coordinate origin, located on the trajectory given by (2), must trace out a uniform movement in the (x, y, z, t) frame.

We will see that the observer O is not in uniform motion in the frame (x, y, z, t). Let $\boldsymbol{r}(t) = \big(r_x(t), r_y(t), r_z(t)\big)$ be the trajectory of the observer O in the (x, y, z, t) frame. Starting from (2a), and using (1a) to transform the q_1 coordinate into (x, y, z, t) coordinates, we find that

$$\frac{1}{2}\big([r_x(t)]^2 - [r_y(t)]^2\big) = \frac{1}{2} \; , \tag{3}$$

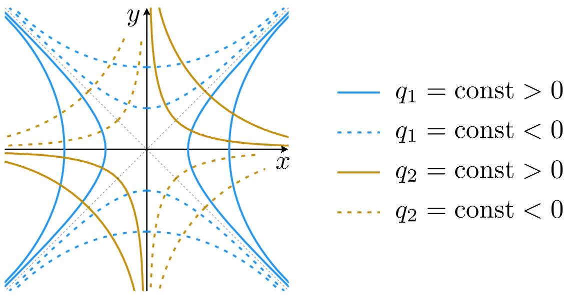
and therefore $[r_x(t)]^2 - [r_y(t)]^2 = 1$. We recognize the equation of a hyperbola $x^2 - y^2 = 1$. This means that the observer O is constrained to move along the hyperbola $x^2 - y^2 = 1$, therefore tracing out a trajectory that is definitely not uniform. [That the observer moves in the (x, y, z, t) frame, and does not remain at rest at one point, follows from (2b).]

[Typo in the exercise sheet: The distributed exercise sheet, as well as the version on the website, stated "$q_1(t') = 0$" instead of "$q_1(t') = 1/2$." The same reasoning applies in that case, too, although it might be a little less obvious to see that the trajectory of O is not uniform. Using $0 = q_1(t) = ([r_x(t)]^2 - [r_y(t)]^2)/2$, we find $[r_x(t)]^2 - [r_y(t)]^2 = 0$ and thus $r_y(t) = \pm r_x(t)$. Then, from $wt' = q_2(t') = r_x(t)\,r_y(t) = \pm[r_x(t)]^2$, we find either $r_x(t) = \sqrt{\pm wt'}$ or $r_x(t) = -\sqrt{\pm wt'}$, which do not correspond to a uniform motion. **]**

Alternatively, the exercise can also be solved by studying the transformations that relate the (x, y, z, t) coordinates to a coordinate system attached to O. To define an inertial frame, the latter coordinate system needs to be related to the reference inertial frame (x, y, z, t) by a Galilean transformation. The transformation (1) from (x, y, z, t) to (q_1, q_2, q_3, t') is not a Galilean transformation, as it is not even a linear transformation (even if we ignore the constant offsets). The transformation from the frame (q_1, q_2, q_3, t') to the observer's own frame is actually effected by a Galilean transformation, because it can be written as a (what appears to be) uniform motion within the coordinate system (q_1, q_2, q_3, t'). But the second transformation cannot "fix" the first transformation not being Galilean, and the overall transformation from (x, y, z, t) to the frame attached to the observer O is not a Galilean transformation. (You can also compute the full transformation to see that it is indeed not even linear.)

(b) Skizzieren Sie die Kurven, die in der x-y Ebene durch $q_1 = \text{Konstant}$ und $q_2 = \text{Konstant}$ gegeben sind. (Diese sind Beispiele von Koordinatenflächen.)

Lösung: By setting $q_1 = \text{const}$, we recognize the equation of a hyperbola $x^2 - y^2 = \text{const}$ in the x-y plane (see sketch below), semi major axis $\sqrt{|q_1|}$. The curves for $q_2 = \text{const}$ trace again hyperbolas, as we recognize the equation $y = \text{const}/x$. We obtain:



Note that the coordinate transformation is not one-to-one (bijective) on the entire x-y plane, as for instance the point $q_1 = 1/2$, $q_2 = 0$ can lie either at $(x, y) = (1, 0)$ or $(x, y) = (-1, 0)$. This can be remedied by specifying that the coordinates are only to be considered in the upper right quadrant of the x-y plane, i.e., with $x > 0$ and $y > 0$.

(c) Es sei V ein zeit-unabhängiges Skalarfeld in den (x, y, z, t) Koordinaten gegeben durch

$$V(x, y, z) = V_0\left(x^2 - y^2\right) + V_1\, z\ , \tag{4}$$

wobei $V_0, V_1 > 0$ Konstanten sind. Berechne die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}\ ; \quad \frac{\partial V}{\partial q_2}\ ; \quad \frac{\partial V}{\partial q_3}; \quad \frac{\partial V}{\partial t'}\ . \tag{5}$$

Hinweis. V kann dazu zunächst in den Koordinaten (q_1, q_2, q_3, t') ausgedrückt werden.

Lösung: We first write $V(x, y, z)$ in terms of the new coordinates (q_1, q_2, q_3, t'). We use the transformation (1) to rewrite the expression given for $V(x, y, z, t)$ as

$$V(q_1, q_2, q_3, t') = 2V_0 q_1 + V_1\big(q_3 - v(t' + c)\big)\ . \tag{6}$$

We can then compute

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 2V_0\ ; \qquad \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0\ ; \qquad \frac{\partial V}{\partial q_3} = V_1\ . \qquad \frac{\partial V}{\partial t'} = -V_1\, v\ . \tag{7}$$

Aufgabe 2: Einfache Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind von großer Relevanz in der Klassischen Mechanik. Wir untersuchen hier Beispiele, die während des ganzes Semesters regelmässig vorkommen werden.

Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen $x(t)$ der folgenden Differenzialgleichungen, wobei $\dot{x} = dx/dt$ und $\ddot{x} = d^2x/dt^2$.

(a) Einfache Differenzialgleichung 1. Ordnung:

$$\dot{x} = \alpha x \ , \tag{8}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{C}$.

Beschreiben Sie die Bedeutung des Realteils und des Imaginärteils von α in Worten;

Lösung: Als gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung lässt sich die Lösung über Separation der Variablen berechnen. Es gilt für positive x

$$\int \frac{1}{x} dx = \alpha \int dt \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow \quad ln(x) + c = \alpha t, \quad c \in \mathbb{R} \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow \quad x(t) = ce^{\alpha t} \tag{11}$$

$$= ce^{\mathrm{Re}(\alpha)t} e^{i\,\mathrm{Im}(\alpha)t} \tag{12}$$

Der Realteil von α bestimmt den Betrag der Amplitude (exponentielles Wachstum bzw. Aussterben). Über die Euler Formel, $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$, kann man sehen, dass der Imaginärteil von α genau die Frequenz einer Schwingung (mit durch Realteil bestimmter Maximalamplitude) ist.

(b) Gedämpfter harmonischer Oszillator:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0 \ , \tag{13}$$

wobei $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$;

Lösung: Für die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung wählen wir einen Exponentialansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir erwarten zwei Lösungen für den Parameter λ, da es sich um eine DGL 2. Ordnung handelt.

Setzt man den Ansatz ein, erhält man eine Gleichung für λ,

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2) = 0 \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0, \tag{15}$$

wobei wir verwendet haben, dass $e^{\lambda t} \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Auflösen der quadratischen Gleichung ergibt

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2}. \tag{16}$$

Im Falle, dass $\gamma^2/4 \neq, \omega^2$ erhält man zwei Lösungen und die allgemeine Lösung ist wegen Linearität der DGL durch

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \tag{17}$$

gegeben. Die Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ sind an die Anfangsbedingungen anzupassen. Im Falle $\gamma^2/4 > \omega^2$, dominiert die Dämpfung, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ und es ergibt sich eine "nicht schwingende" reelle Lösung über reelle c_1, c_2. Für den Fall $\gamma^2/4 < \omega^2$ ist das Argument unter der Wurzel negativ und λ wird komplex. In diesem Fall dominiert die Eigenschwingung des Oszillators. λ hat einen nicht-verschwindenden Imaginärteil, der mit komplexen c_1, c_2 zu einer reellen, "schwingenden" Lösung führt.

Der Übergang zwischen den beiden Regimen, $\gamma^2/4 = \omega^2$, muss gesondert betrachtet werden, da wir über den Ansatz nur eine Lösung $c_1 e^{-\gamma t/2}$ erhalten. Um aus dieser Lösung(sfamilie) eine allgemeine herzuleiten können wir den Ansatz verallgemeinern indem wir $c_1 \mapsto c(t)$ zeitabhängig wählen. Setzen wir $c(t)e^{-\gamma t/2}$ in die DGL ein und verwenden $\gamma^2/4 = \omega^2$ erhalten wir

$$\ddot{c}(t) = 0, \tag{18}$$

welches durch $c(t) = a + bt,\ a, b \in \mathbb{R}$ gelöst wird. Zusammen ergibt dies die allgemeine Lösung

$$x(t) = (a + bt)e^{-\gamma t/2}, \tag{19}$$

wobei a, b an alle (rellen) Anfangsbedingungen angepasst werden können.

(c) Bewegungsgleichung für einen Spin im Magnetfeld:

$$\dot{x} = -\omega y; \qquad \qquad \dot{y} = \omega x \tag{20}$$

wobei $\omega \in \mathbb{R}$.

Hinweis. Vereinfachen Sie das Gleichungssystem auf eine Differenzialgleichung für x.

Lösung: Leiten wir die erste Gleichung nach der Zeit ab erhalten wir

$$\ddot{x} = -\omega \dot{y} = -\omega x. \tag{21}$$

Wir haben die beiden Variablen entkoppelt und können für x lösen (Exponentialansatz oder Separation der Variablen). Wir erhalten die allgemeine Lösung

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t), \quad A, B \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Bemerke, dass diese Lösung equivalent zu Eq. (17) mit imaginärem $\lambda_{1,2}$ ist. Eingesetzt in $y = -(1/\omega)\,\dot{x}$ (welcher aus $\dot{x} = -\omega y$ kommt), ergibt

$$y(t) = -\frac{1}{\omega}\big(A\omega \cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t)\big) = -A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)\ . \tag{23}$$

A, B werden durch die Anfangsbedingungen für x und y bestimmt.