Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2022

Übungsblatt 3
Gekoppelte Schwingungen, Newtonsche Mechanik mit Zwangskräfte, und Kurvenintegrale

Abgabe bis: 13.05.2022 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Gekoppelte Federn

Der Hochenergiephyiker Sidney Coleman sagte: "*Die Karriere junger theoretischer Physiker besteht darin den harmonischen Oszillator in aufsteigenden Leveln der Abstraktion zu studieren*". Hier wollen wir mit dieser Reise beginnen.

Betrachte zunächst ein Objekt mit Masse m im Vakuum, dass durch eine Feder an einer Wand befestigt ist. Die Feder übt eine Kraft $F_{\mathrm{F}} = -kx$ auf die Masse aus, wobei x den Ort des Objekts bezeichnet und k die Federkonstante genannt wird.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und finden Sie die allgemeine Lösung.

Etwas komplexere Dynamik finden wir, wenn man zwei Objekte mit gleicher Masse m betrachtet. Diese Massen sind je mit einer von zwei gegenüberliegenden Wänden durch eine Feder mit Federkonstante K verbunden. Zusätzlich sind beide durch eine Feder mit Stärke k miteinander verbunden.

(b) Welche Kräfte wirken auf die beiden Massen? Schreiben sie die Bewegungsgleichung mithilfe einer Matrix M und einem Vektor $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$ in der Form

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = M\boldsymbol{r}. \tag{1}$$

(c) Finden Sie eine orthogonale Matrix (Rotationsmatrix) R und eine diagonale Matrix D, so dass $M = RDR^{\mathrm{T}}$.

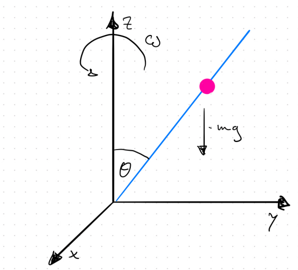
(d) Nutzen Sie diese rotierte Eigenbasis um die Bewegungsgleichung allgemein zu lösen.

(e) Was passiert mit der Lösung im Limes $k \to \infty$ und was im Limes $K \to \infty$?

(f) In einem System seien n Objekte durch Federn gekoppelt, so dass sich die Bewegungsgleichung als $\ddot{\boldsymbol{r}} = M\boldsymbol{r}$ für eine symmetrische $n \times n$ Matrix M schreiben lässt. Welche physikalische Interpretation haben die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix M?

Aufgabe 2: Perle auf Draht

Wir betrachten eine Perle, idealisiert als Massenpunkt der Masse m, die reibungsfrei auf einem Draht gleitet, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und konstantem Neigungswinkel θ um eine Achse rotiert. Die Perle ist außerdem der Gravitationskraft $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$ ausgesetzt, die entlang der Rotationsachse wirkt.



In dieser Aufgabe wollen wir die Bewegung der Perle unter den gegebenen Zwangsbedingungen analysieren. Dazu eigenen sich natürlich Kugelkoordinaten. Den Ort der Perle geben wir mit $\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{e}}_r$ an, wobei die Basisvektoren in Kugelkoordinaten wie folgt gegeben sind:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass die zweifache Ableitung des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ unter Berücksichtigung der Zwangsbedingungen (bezüglich θ und ϕ) gegeben ist durch

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\omega^2 \sin^2\theta)\,\hat{\boldsymbol{e}}_r + 2\dot{r}\omega\sin(\theta)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi - r\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\ . \tag{3}$$

Die Zwangsbedingungen führen dazu, dass neben der Schwerkraft zusätzliche *Zwangskäfte* auf die Perle wirken. In der Vorlesung werden Sie lernen, wie man geschickt mit Zwangsbedingunen und -kräften umgeht ohne großartig über sie nachdenken zu müssen. Hier wollen wir die Zwangskräfte jedoch zu Fuß ausrechnen. Jede Zwangskraft kann **nur senkrecht** zum Draht wirken, da ihr paralleler Anteil die Perle beschleunigen würde und somit nicht zur Einhaltung der Zwangsbedingung beiträgt.

(b) Zeigen Sie, dass die Zentripetalkraft, die der Draht auf die Perle ausübt die Zwangskraft $\boldsymbol{F}_z = -m\omega^2 r\sin(\theta)\cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ zur Folge hat.

(c) Zeigen Sie, dass die konstante Rotation des Drahtes ein Drehmoment auf die Perle ausübt wenn diese ihren Ort ändert (wenn $\dot{r} \neq 0$) und dass daraus die Zwangskraft $\boldsymbol{F}_d = 2m\dot{r}\omega\sin(\theta)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ erwächst. *Hinweis: Analog zum linearen Newtonschen Satz, $\dot{\mathbf{p}} = \boldsymbol{F}$, gilt in der Rotationsbewegung $\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{D}$, wobei $\boldsymbol{L}$ der Drehimpuls und $\boldsymbol{D}$ das Drehmoment ist.*

(d) Zeigen Sie, dass der relevante Teil der Gewichtskraft durch $\boldsymbol{F}_{g\parallel} = -mg\cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{e}}_r$ gegeben ist.

(e) Zeigen Sie, wie sich mit den oben ausgerechneten Kräften die Differenzialgleichung

$$\ddot{r} - r\omega^2\sin^2\theta = -g\cos\theta \tag{4}$$

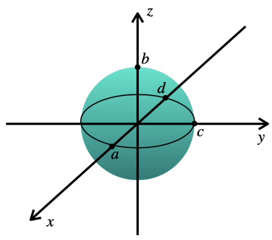
für die Bewegung der Perle ergibt. Diese brauchen Sie hier nicht lösen.

(f) Bei welchem Abstand r wirkt entlang des Drahtes keine Kraft auf die Perle?

Aufgabe 3: Kurvenintegrale auf der Kugeloberfläche

Wir betrachten eine um den Koordinatenursprung zentrierte Sphäre mit Radius r, wie im folgenden Bild gezeigt.
Die Koordinaten der vier Punkte a, b, c und d sind gegeben durch:

$$a = (r, 0, 0), \qquad b = (0, 0, r), \qquad c = (0, r, 0), \qquad d = (-r, 0, 0)\ .$$



(a) Geben Sie eine Parametrisierung der kürzesten Kurve entlang der Sphäre von Punkt a nach Punkt b an. In anderen Worten: Berechnen Sie eine Funktion $r(t) = (r_x(t), r_y(t), r_z(t))$, sowie Werte t_1 und t_2, sodass $a = r(t_1)$, $b = r(t_2)$ und für alle $t_1 \leq t \leq t_2$ der Punkt $r(t)$ auf der Sphäre liegt.

(b) Geben Sie eine Parametrisierung der kürzesten Kurve entlang der Sphäre von Punkt b nach Punkt c an.

(c) Geben Sie eine Parametrisierung der kürzesten Kurve entlang der Sphäre von Punkt c nach Punkt d an.

(d) Betrachten Sie nun ein Teilchen, das sich nur auf der Oberfläche der Sphäre bewegen kann und berechnen Sie die von einem Kraftfeld $F(x, y, z) = (x^2, y^2, -xz)$ verrichtete Arbeit, wenn es das Teilchen entlang der oben formulierten Kurve von Punkt a nach Punkt b bewegt.