Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2022

Übungsblatt 3
Gekoppelte Schwingungen, Newtonsche Mechanik mit Zwangskräfte, und Kurvenintegrale

Abgabe bis: 13.05.2022 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Gekoppelte Federn

Der Hochenergiephyiker Sidney Coleman sagte: "*Die Karriere junger theoretischer Physiker besteht darin den harmonischen Oszillator in aufsteigenden Leveln der Abstraktion zu studieren*". Hier wollen wir mit dieser Reise beginnen.

Betrachte zunächst ein Objekt mit Masse m im Vakuum, dass durch eine Feder an einer Wand befestigt ist. Die Feder übt eine Kraft $F_\mathrm{F} = -kx$ auf die Masse aus, wobei x den Ort des Objekts bezeichnet und k die Federkonstante genannt wird.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und finden Sie die allgemeine Lösung.

Lösung: Die Bewegungsgleichung die den harmonischen Oszillator beschreibt ist:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x =: -\omega^2 x. \tag{s.1}$$

Die allgemeine Lösung lässt sich schreiben als:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi). \tag{s.2}$$

Äquivalent ist auch

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \tag{s.3}$$

eine allgemeine Lösung.

Etwas komplexere Dynamik finden wir, wenn man zwei Objekte mit gleicher Masse m betrachtet. Diese Massen sind je mit einer von zwei gegenüberliegenden Wänden durch eine Feder mit Federkonstante K verbunden. Zusätzlich sind beide durch eine Feder mit Stärke k miteinander verbunden.

(b) Welche Kräfte wirken auf die beiden Massen? Schreiben sie die Bewegungsgleichung mithilfe einer Matrix M und einem Vektor $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2)^\mathrm{T}$ in der Form

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = M\boldsymbol{r}. \tag{1}$$

Lösung: Auf das erste Objekt wirken die Kräfte

$$F_1 = -Kx_1, \qquad F_{12} = -k(x_1 - x_2) \tag{s.4}$$

und auf das zweite Objekt

$$F_{21} = -k(x_2 - x_1), \qquad F_2 = -Kx_2. \tag{s.5}$$

Damit erhält man die folgende Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = M\boldsymbol{r}, \tag{s.6}$$

mit

$$M = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} -K-k & k \\ k & -K-k. \end{pmatrix} \tag{s.7}$$

(c) Finden Sie eine orthogonale Matrix (Rotationsmatrix) R und eine diagonale Matrix D, so dass $M = RDR^{\mathrm{T}}$.

Lösung: Die Eigenwerte der Matrix M können wir durch das charakteristische Polynom gefunden werden.

$$p(\lambda) := \det(M - \lambda \mathbb{1}) = (-(K+k)/m - \lambda)^2 - k^2/m^2 \stackrel{!}{=} 0 \tag{s.8}$$

Das wird gelöst durch

$$\lambda_1 = -K/m =: -\omega_1^2 \qquad \lambda_2 = -(K+2k)/m =: -\omega_2^2. \tag{s.9}$$

Die Eigenvektoren können jetzt leicht geraten werden oder als Lösungen des Gleichungssystems $\lambda_{1,2}\boldsymbol{v} = M\boldsymbol{v}$ gefunden werden:

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}. \tag{s.10}$$

Daher erhalten wir

$$R := H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}, \qquad D := \begin{pmatrix}-\omega_1^2 & 0\\0 & -\omega_2^2\end{pmatrix}. \tag{s.11}$$

(d) Nutzen Sie diese rotierte Eigenbasis um die Bewegungsgleichung allgemein zu lösen.

Lösung: Wir können eine allgemeine Kurve in $\mathbb{R}^2$ schreiben als $\boldsymbol{r}(t) = a_1(t)\boldsymbol{v}_1 + a_2(t)\boldsymbol{v}_2$. In dieser Basis ist die Bewegungsgleichung (S.6) entkoppelt:

$$\ddot{a}_1\boldsymbol{v}_1 + \ddot{a}_2\boldsymbol{v}_2 = -\omega_1^2 a_1\boldsymbol{v}_1 - \omega_2^2 a_2\boldsymbol{v}_2. \tag{s.12}$$

Da $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ linear unabhängig sind erhalten wir als Lösung zwei unabhängige harmonische Oscillatoren:

$$a_1(t) = A_1\sin(\omega_1 t + \phi_1) \qquad a_2(t) = A_2\sin(\omega_2 t + \phi_2). \tag{s.13}$$

In der Standardbasis:

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}A_1\sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \phi_2)\\A_1\sin(\omega_1 t + \phi_1) - A_2\sin(\omega_2 t + \phi_2)\end{pmatrix}. \tag{s.14}$$

(e) Was passiert mit der Lösung im Limes $k \to \infty$ und was im Limes $K \to \infty$?

Lösung: Für $k \to \infty$ wird die Frequenz ω_2 unendlich. Insbesondere wird die Bewegung $a_2(t)\boldsymbol{v}_2$ constant. Das deckt sich mit der Beobachtung, dass in diesem Limit die Feder starr wird.

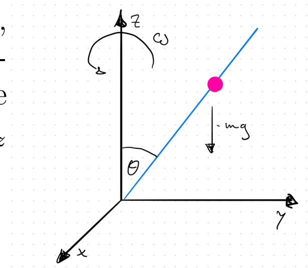
Wenn $K \to \infty$, dann werden beide Frequenzen unendlich, das gesamte Gebilde wird also starr und unbeweglich.

(f) In einem System seien n Objekte durch Federn gekoppelt, so dass sich die Bewegungsgleichung als $\ddot{\boldsymbol{r}} = M\boldsymbol{r}$ für eine symmetrische $n \times n$ Matrix M schreiben lässt. Welche physikalische Interpretation haben die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix M?

Lösung: Allgemein gibt es zu jedem Eigenvektor der matrix M eine Lösung der Bewegungsgleichung, die sich durch eine einzige Sinusschwingung beschreiben lässt. Diese Lösungen werden Eigenmoden genannt. Die Eigenwerte bestimmen die Frequenzen dieser Eigenmoden. Genauer entspricht ein Eigenwert λ einer Eigenfrequenz ω gerade via $\lambda = -\omega^2$. Allgemein sind Lösungen Superpositionen aus diesen Eigenmoden.

Aufgabe 2: Perle auf Draht

Wir betrachten eine Perle, idealisiert als Massenpunkt der Masse m, die reibungsfrei auf einem Draht gleitet, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und konstantem Neigungswinkel θ um eine Achse rotiert. Die Perle ist außerdem der Gravitationskraft $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$ ausgesetzt, die entlang der Rotationsachse wirkt.



In dieser Aufgabe wollen wir die Bewegung der Perle unter den gegebenen Zwangsbedingungen analysieren. Dazu eigenen sich natürlich Kugelkoordinaten. Den Ort der Perle geben wir mit $\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{e}}_r$ an, wobei die Basisvektoren in Kugelkoordinaten wie folgt gegeben sind:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass die zweifache Ableitung des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ unter Berücksichtigung der Zwangsbedingungen (bezüglich θ und ϕ) gegeben ist durch

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\omega^2\sin^2\theta)\,\hat{\boldsymbol{e}}_r + 2\dot{r}\omega\sin(\theta)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi - r\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\ . \tag{3}$$

Lösung: We know $\dot{\phi} = \omega$ and $\dot{\theta} = 0$. Hence $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\omega\sin(\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ and

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + \dot{r}\sin(\theta)\omega\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + \dot{r}\sin(\theta)\omega\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + r\sin(\theta)\omega^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -\cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\sin(\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_r - \cos(\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta}\ . \tag{s.15}$$

Die Zwangsbedingungen führen dazu, dass neben der Schwerkraft zusätzliche *Zwangskäfte* auf die Perle wirken. In der Vorlesung werden Sie lernen, wie man geschickt mit Zwangsbedingunen und -kräften umgeht ohne großartig über sie nachdenken zu müssen. Hier wollen wir die Zwangskräfte jedoch zu Fuß ausrechnen. Jede Zwangskraft kann **nur senkrecht** zum Draht wirken, da ihr paralleler Anteil die Perle beschleunigen würde und somit nicht zur Einhaltung der Zwangsbedingung beiträgt.

(b) Zeigen Sie, dass die Zentripetalkraft, die der Draht auf die Perle ausübt die Zwangskraft $\boldsymbol{F}_z = -m\omega^2 r\sin(\theta)\cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ zur Folge hat.

Lösung: The centripetal force on a circle of radius $r_\perp = \sin(\theta)r$ is given by $\boldsymbol{F}_c = -m\omega^2 r_\perp\hat{\boldsymbol{e}}_{r_\perp}$, where $\hat{\boldsymbol{e}}_{r_\perp}$ is perpendicular to the axis of rotation, i.e. the z axis. Since we are interested in forces perpendicular to the wire we need to subtract the overlap of $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ with $\hat{\boldsymbol{e}}_{r_\perp}$. This is done by multiplying a factor of $\cos(\theta)$ as a simple sketch reveals.

(c) Zeigen Sie, dass die konstante Rotation des Drahtes ein Drehmoment auf die Perle ausübt wenn diese ihren Ort ändert (wenn $\dot{r} \neq 0$) und dass daraus die Zwangskraft $\boldsymbol{F}_d = 2m\dot{r}\omega\sin(\theta)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ erwächst. *Hinweis: Analog zum linearen Newtonschen Satz, $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$, gilt in der Rotationsbewegung $\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{D}$, wobei $\boldsymbol{L}$ der Drehimpuls und $\boldsymbol{D}$ das Drehmoment ist.*

Lösung: The absolute value of the angular momentum is given by $L = mr_\perp^2\omega$, where $r_\perp = \sin(\theta)r$ and the torque is $M = r_\perp F_{\text{angular}}$. This yields $\boldsymbol{F}_{\text{angular}} = 2m\dot{r}_\perp\omega\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$.

(d) Zeigen Sie, dass der relevante Teil der Gewichtskraft durch $\boldsymbol{F}_{g\parallel} = -mg\cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{e}}_r$ gegeben ist.

Lösung: Simple Projection of $\boldsymbol{F}_g$ onto $\hat{\boldsymbol{e}}_r$.

(e) Zeigen Sie, wie sich mit den oben ausgerechneten Kräften die Differenzialgleichung

$$\ddot{r} - r\omega^2 \sin^2\theta = -g\cos\theta \tag{4}$$

für die Bewegung der Perle ergibt. Diese brauchen Sie hier nicht lösen.

Lösung: Collecting all the forces in spherical coordinates allows us to look at the radial component, proportional to $\hat{\boldsymbol{e}}_r$, which yields the equation.

(f) Bei welchem Abstand r wirkt entlang des Drahtes keine Kraft auf die Perle?

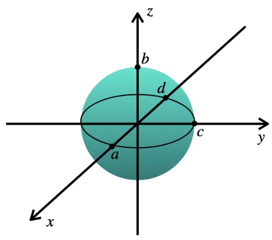
Lösung: Wenn keine Kraft auf die Perle wirkt ist $\ddot{r} = 0$, sodass wir aus der Radialkomponente der Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung der Zwangsbedingungen haben:

$$-r\omega^2\sin^2(\theta) = -g\cos(\theta) \quad \Longleftrightarrow \quad r = \frac{g\cos(\theta)}{\omega^2\sin^2(\theta)} \tag{s.16}$$

Aufgabe 3: Kurvenintegrale auf der Kugeloberfläche

Wir betrachten eine um den Koordinatenursprung zentrierte Sphäre mit Radius r, wie im folgenden Bild gezeigt.
Die Koordinaten der vier Punkte a, b, c und d sind gegeben durch:

$$a = (r, 0, 0), \qquad b = (0, 0, r), \qquad c = (0, r, 0), \qquad d = (-r, 0, 0)\ .$$



(a) Geben Sie eine Parametrisierung der kürzesten Kurve entlang der Sphäre von Punkt a nach Punkt b an. In anderen Worten: Berechnen Sie eine Funktion $r(t) = (r_x(t), r_y(t), r_z(t))$, sowie Werte t_1 und t_2, sodass $a = r(t_1)$, $b = r(t_2)$ und für alle $t_1 \le t \le t_2$ der Punkt $r(t)$ auf der Sphäre liegt.

(b) Geben Sie eine Parametrisierung der kürzesten Kurve entlang der Sphäre von Punkt b nach Punkt c an.

(c) Geben Sie eine Parametrisierung der kürzesten Kurve entlang der Sphäre von Punkt c nach Punkt d an.

Lösung: Verschiedene Parametrisierungen der Kurve sind möglich. Mögliche Kandidaten sind:

$$\begin{aligned}
a \to b &: r(t) = (r\sin(t), 0, r\cos(t)) \text{ with } t_1 = \pi/2, \quad t_2 = 0 \\
b \to c &: r(t) = (0, r\sin(t), r\cos(t)) \text{ with } t_1 = 0, \quad t_2 = \pi/2 \\
c \to d &: r(t) = (r\cos(t), r\sin(t), 0) \text{ with } t_1 = \pi/2, \quad t_2 = \pi
\end{aligned}$$

(d) Betrachten Sie nun ein Teilchen, das sich nur auf der Oberfläche der Sphäre bewegen kann und berechnen Sie die von einem Kraftfeld $F(x, y, z) = (x^2, y^2, -xz)$ verrichtete Arbeit, wenn es das Teilchen entlang der oben formulierten Kurve von Punkt a nach Punkt b bewegt.

Lösung: Per Definition ist die entlang einer Kurve verrichtete Arbeit gegeben durch das Wegintegral der Kraft entlang dieser Kurve

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_{t_1}^{t_2} F(r(t)) \cdot r'(t) dt. \tag{s.17}$$

Oben haben wir schon eine Parametrisierung des kürzesten Wegs von a nach b berechnet:

$$r(t) = (r\sin(t), 0, r\cos(t)) \text{ with } t_1 = \pi/2, \quad t_2 = 0. \tag{s.18}$$

Daraus folgt

$$r'(t) = (r\cos(t), 0, -r\sin(t)), \tag{s.19}$$

und

$$\begin{aligned}
W &= \int_{\pi/2}^{0} (r^2\sin^2(t), 0, -r^2\sin(t)\cos(t)) \cdot (r\cos(t), 0, -r\sin(t))dt \\
&= \int_{\pi/2}^{0} 2r^3\sin^2(t)\cos(t)dt \\
&= 2r^3\left[\frac{\sin^3(t)}{3}\right]_{\pi/2}^{0} \\
&= -\frac{2r^3}{3}.
\end{aligned} \tag{s.20}$$