

Übungsblatt 4
Planeten und Zwangsbedingungen

Abgabe bis: 20.05.2022 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Planetenbewegung

In dieser Aufgabe betrachten wir zwei Planeten mit unterschiedlichen Massen $m_1 \neq m_2$, und Koordinaten $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, die sich umeinander bewegen. Die Gesamtenergie des Systemes sei gegeben durch

$$E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2) = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 + U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|); \quad U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (1)$$

- (a) Drücken Sie die Energie $E(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{R}, \mathbf{r})$ in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten mit Gesamtmasse M und Relativmasse μ aus:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}; \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; \quad M = m_1 + m_2; \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2)$$

Identifizieren Sie die entkoppelten Energieterme für Schwerpunkts- und Relativbewegung. Leiten Sie die Bewegungsgleichung für die Schwerpunktskoordinate her und lösen Sie diese.

Im folgenden betrachten wir nur noch den Energieterm assoziiert mit der Relativbewegung. Um die Relativbewegung besser verstehen zu können, führen wir eine Koordinatentransformation in Zylinderkoordinaten durch $(r_1, r_2, r_3) \mapsto (\rho, \phi, z)$.

- (b) Wie lautet die Energie für die Relativbewegung in diesem Koordinatensystem?

Wie wir sehen, ist die Energie der Relativbewegung unabhängig vom Winkel ϕ (aber nicht unabhängig von $\dot{\phi}$). Wie Sie später in der Vorlesung lernen werden, hat diese *Rotationssymmetrie* des Potentials zur Folge, dass der Drehimpuls des Systemes

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{const.} \quad (3)$$

erhalten ist. Da damit auch die Richtung von \mathbf{L} konstant ist, und der hergeleitete Energieterm der Relativbewegung unabhängig der Orientierung der $\hat{\mathbf{e}}_z$ -Achse ist, wählen wir das Koordinatensystem so, dass die $\hat{\mathbf{e}}_z$ -Achse in Richtung des Drehimpulses zeigt, sodass $\mathbf{L} = L \hat{\mathbf{e}}_z$.

- (c) Begründen Sie, warum das nur dann zulässig ist, wenn $\mathbf{L} = \text{const.}$ gilt.

In diesem Koordinatensystem gilt $z(t) = 0$. Die Relativkoordinate bewegt sich in diesem neuen Koordinatensystem also nur in der x - y -Ebene.

- (d) Begründen Sie dies.

- (e) Leiten Sie $L = L(\rho, \dot{\phi})$ her und setzen Sie $\dot{\phi} = \dot{\phi}(L)$ in den Energieausdruck der Relativbewegung ein. Identifizieren Sie den kinetischen- und Potentialterm der Relativbewegung in ρ und stellen sie die Bewegungsgleichung $\mu \ddot{\rho} = ?$ auf.

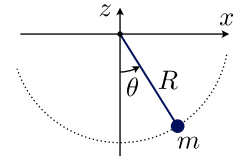
Hinweis. Der ∇ -Operator in Zylinderkoordinaten lautet $\nabla = \hat{\mathbf{e}}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}$.

- (f) Skizzieren Sie das Potential für $3L^2 > 2\gamma\mu M$. Nähern Sie das hergeleitete Potential in zweiter Ordnung Taylorentwicklung um einen sinnvollen Punkt und lösen Sie die Bewegungsgleichung in dieser Approximation.

Aufgabe 2: Freiheitsgrade und Zwangskräfte

In dieser Aufgabe werden wir herausfinden, wie man Einschränkungen auf der Bewegung von Körpern einsetzen kann. Diese Aufgabe nutzt als Einführung zur Lagrangemechanik.

Betrachten Sie eine Masse m am Ende eines steifen masselosen Pendels der Länge R . Das Pendel wird am Ursprung $(0, 0, 0)$ befestigt und darf sich nur in der x - z -Ebene bewegen. Das Gravitationsfeld ist homogen und wirkt in die $-z$ -Richtung.



- Die Masse m kann sich nicht an einem beliebigen Ortspunkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ befinden, da sie am Ende des Pendels befestigt ist. Schreiben Sie alle Bedingungen auf, die die Koordinaten (x, y, z) der Masse erfüllen müssen.
- Für dieses Problem sind sphärische Koordinaten (r, θ, ϕ) , mit θ von der $-z$ -Achse gemessen, besser geeignet (siehe obige Abbildung). Schreiben Sie alle Bedingungen auf die die Koordinaten (r, θ, ϕ) der Masse erfüllen müssen.

Wir möchten nun die Bewegungsgleichungen für die Masse finden.

- Skizzieren Sie, wie die Gravitationskraft \mathbf{F}_G sowie die Kontaktkraft \mathbf{F}_K , die die Masse auf der Pendel befestigt, auf die Masse wirken. Wirken auf die Masse weitere Kräfte?
- Schreiben Sie Newtons 2. Gesetz für die Masse m in der Basis $\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\phi, \hat{\mathbf{e}}_\theta$, und finden Sie die Bewegungsgleichungen für (r, θ, ϕ) .

Hinweis. Zeigen Sie zuerst, dass $\ddot{\mathbf{r}} = -R\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{e}}_r + R\ddot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta$, wobei \mathbf{r} der Ortsvektor von die Masse m ist. Argumentieren Sie zudem, dass die Kraft \mathbf{F}_K entlang $\hat{\mathbf{e}}_r$ wirken muss.

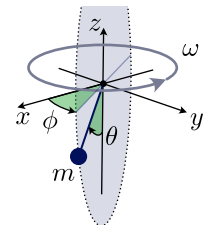
- Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Geben Sie unabhängigen Parameter an, die das System vollständig parametrisieren.

Wir definieren die *Lagrangefunktion* $L(\theta, \dot{\theta}) = T(\dot{\theta}) - V(\theta)$, wobei T (V) die kinetische Energie (potenzielle Energie) des Systems ist, ausgedrückt als Funktion von $\dot{\theta}$ (bzw. θ). In der Lagrangemechanik zweiter Art werden Sie sehen, dass die Euler-Lagrange Gleichung gilt:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0. \quad (4)$$

- Verifizieren Sie, dass die Euler-Lagrange Gleichung zur gleichen Bewegungsgleichung für θ führt wie die, die in (d) gefunden wurde.
- Versuchen Sie, die Euler-Lagrange Gleichung bezüglich die x -Koordinate statt der θ -Koordinate anzuwenden, d.h., berechnen Sie $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$, indem T, V bezüglich $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ausgedrückt werden. Gilt die Euler-Lagrange Gleichung immer noch in diesem Fall?

Das Pendel wird nun so befestigt, dass es sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω sich um der z -Achse dreht, sodass sich die Ebene, in welcher das Pendel schwingt, um die z -Achse dreht.



- Geben Sie alle die Zwangsbedingungen als Gleichungen in der Form $S_i(r, \phi, \theta, t) = 0$, mit eine Funktion S_i für jede Zwangsbedingung an.

Aus dem d'Alembertsche Prinzip wissen wir, dass Zwangskräfte immer senkrecht zur Mannigfaltigkeit der möglichen Parameterwerten wirken. Äquivalent ist, dass die gesamte Zwangskraft eine lineare Kombination der Gradienten $\nabla S_i(r, \phi, \theta, t)$ sein muss.

- Berechnen Sie den Gradienten $\nabla S_i(r, \phi, \theta, t)$ für jede Zwangsbedingung und schreiben Sie die allgemeine Form der gesamten Zwangskraft. Stellen Sie Newtons 2. Gesetz auf und finden sie die Bewegungsgleichungen für (r, θ, ϕ) .

Hinweis. In den Koordinaten (r, ϕ, θ) gilt $\nabla = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$.