Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2022

Übungsblatt 4
Planeten und Zwangsbedingungen

Abgabe bis: 20.05.2022 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Planetenbewegung

In dieser Aufgabe betrachen wir zwei Planeten mit unterschiedlichen Massen $m_1 \neq m_2$, und Koordinaten $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, die sich umeinander bewegen. Die Gesamtenergie des Systemes sei gegeben durch

$$E(\dot{\mathbf{r}_1}, \dot{\mathbf{r}_2}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{\mathbf{r}_1}^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\mathbf{r}_2}^2 + U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \; ; \qquad U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \; . \tag{1}$$

(a) Drücken Sie die Energie $E(\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{R}, \mathbf{r})$ in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten mit Gesamtmasse M und Relativmasse μ aus:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \; ; \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \; ; \qquad M = m_1 + m_2 \; ; \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \; . \tag{2}$$

Identifizieren Sie die entkoppelten Energieterme für Schwerpunkts- und Relativbewegung. Leiten Sie die Bewegungsgleichung für die Schwerpunktskoordinate her und lösen Sie diese.

Lösung: Durch Einsetzen sehen wir dass

$$E = \underbrace{\frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^2}_{E_s(\dot{\mathbf{R}},\mathbf{R})} + \underbrace{\frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + U(|\mathbf{r}|)}_{E_r(\dot{\mathbf{r}},\mathbf{r})} \tag{s.1}$$

gilt. Wir identifizieren, dass der Schwerpunktsterm nur einen Beitrag aus der kinetischen Energie erhält und keine potentielle Energie aufweisst. Damit bewegt sich der Schwerpunkt frei mit

$$M\ddot{\mathbf{R}} = 0. \tag{s.2}$$

Damit haben wir $R(t) = At + B$.

Im folgenden betrachten wir nur noch den Energieterm assoziert mit der Relativbewegung. Um die Relativbewegung besser verstehen zu können, führen wir eine Koordinatentransformation in Zylinderkoordinaten durch $(r_1, r_2, r_3) \mapsto (\rho, \phi, z)$.

(b) Wie lautet die Energie für die Relativbewegung in diesem Koordinatensystem?

Lösung: Wir haben

$$\mathbf{r} = \rho\,\hat{\mathbf{e}}_\rho + z\,\hat{\mathbf{e}}_z \; ; \qquad |\mathbf{r}|^2 = \rho^2 + z^2 \; , \tag{s.3}$$

und

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho}\,\hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho\,\underbrace{\dot{\hat{\mathbf{e}}}_\rho}_{\dot{\phi}\hat{\mathbf{e}}_\phi} + \dot{z}\,\hat{\mathbf{e}}_z \; . \tag{s.4}$$

Die Einheitsvektoren sind orthogonal, womit wir

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 \tag{s.5}$$

erhalten und damit

$$E_r = \frac{\mu}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + U(\sqrt{\rho^2 + z^2}) \; . \tag{s.6}$$

Wie wir sehen, ist die Energie der Relativbewegung unabhängig vom Winkel ϕ (aber nicht unabhängig von $\dot{\phi}$). Wie Sie später in der Vorlesung lernen werden, hat diese *Rotationssymmetrie* des Potentials zur Folge, dass der Drehimpuls des Systemes

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = const. \tag{3}$$

erhalten ist. Da damit auch die Richtung von $\mathbf{L}$ konstant ist, und der hergeleitete Energieterm der Relativbegegung unabhängig der Orientierung der $\hat{\mathbf{e}}_z$-Achse ist, wählen wir das Koordinatensystem so, dass die $\hat{\mathbf{e}}_z$-Achse in Richtung des Drehimpulses zeigt, sodass $\mathbf{L} = L\hat{\mathbf{e}}_z$.

(c) Begründen Sie, warum das nur dann zulässig ist, wenn $\mathbf{L} = const.$ gilt.

Lösung: Weil das neue Koordinatensystem ansonsten kein Intertialsystem ist.

In diesem Koordinatensystem gilt $z(t) = 0$. Die Relativkoordinate bewegt sich in diesem neuen Koordinatensystem also nur in der x–y–Ebene.

(d) Begründen Sie dies.

Lösung: Da $\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \parallel \hat{\mathbf{e}}_z$, gilt $\mathbf{r} \perp \hat{\mathbf{e}}_z$.

(e) Leiten Sie $L = L(\rho, \dot{\phi})$ her und setzen Sie $\dot{\phi} = \dot{\phi}(L)$ in den Energieausdruck der Relativbewegung ein. Identifizieren Sie den kinetischen- und Potentialterm der Relativbewegung in ρ und stellen sie die Bewegungsgleichung $\mu\ddot{\rho} = ?$ auf.

Hinweis. Der ∇-Operator in Zylinderkoordinaten läutet $\nabla = \hat{\mathbf{e}}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}$.

Lösung: Mit $z = 0$ leiten wir her

$$\mathbf{L} = \mu\rho^2\dot{\phi}\,\hat{\mathbf{e}}_z = L\hat{\mathbf{e}}_z \; . \tag{s.7}$$

Damit ergibt sich die Energie assoziiert mit der Relativbewegung zu

$$E_r = \underbrace{\frac{\mu}{2}\dot{\rho}^2}_{E_{r,\,\mathrm{kin}}(\dot{\rho})} + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu\rho^2} + U(\rho)}_{V_{r,\,\mathrm{eff.}}(\rho)} . \tag{s.8}$$

Wir identifizieren das effektive Potential

$$V_{r,\,\mathrm{eff.}}(\rho) = \frac{L^2}{2\mu\rho^2} - \frac{\gamma\mu M}{\rho} \; . \tag{s.9}$$

Mit dem ∇-Operator in Zylinderkoordinaten:

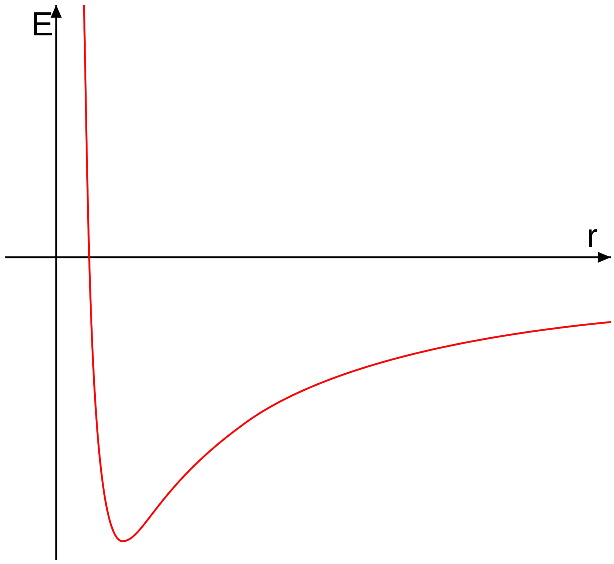
$$\nabla f(\rho, \phi, z) = \hat{\mathbf{e}}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi} f + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} f \tag{s.10}$$

erhalten wir

$$\mu\ddot{\rho} = \frac{L^2}{\mu\rho^3} - \frac{\partial U(\rho)}{\partial \rho} = \frac{L^2}{\mu\rho^3} - \gamma\mu M \frac{1}{\rho^2}.$$

(f) Skizzieren Sie das Potential für $3L^2 > 2\gamma\mu M$. Nähern Sie das hergeleitete Potential in zweiter Ordnung Taylorentwicklung um einen sinnvollen Punkt und lösen Sie die Bewegungsgleichung in dieser Approximation.

Lösung: Der Potenziel sieht wie Folgendes aus:



Wir sehen, dass $0 = \frac{\partial V_{r,\,\text{eff.}}(\rho)}{\partial \rho}$ gelöst ist für $\rho = \overline{\rho} = \frac{L^2}{\gamma\mu^2 M}$. In zweiter Ordnung Taylor-Entwicklung ergibt das für das Potential

$$V_{r,\,\text{eff.}}(\rho) = V(\overline{\rho}) + \underbrace{\frac{1}{2\overline{\rho}^3}\left[\frac{3L^2}{\mu\overline{\rho}} - 2\gamma\mu M\right]}_{c}(\rho-\overline{\rho})^2 + O((\rho-\overline{\rho})^4)\ , \tag{s.11}$$

und damit haben wir im Potentialminimum mit $x = \rho - \overline{\rho}$ eine Bewegungsgleichung

$$\mu\ddot{x} = -c\frac{\partial}{\partial x}x^2 = -2cx.$$

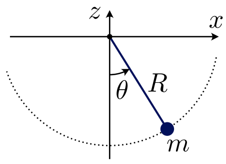
Die allgemeine Lösung dieser Bewegungsgleichung ist gegeben durch

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\ ; \qquad \omega = \sqrt{\frac{2c}{\mu}}\ . \tag{s.12}$$

Aufgabe 2: Freiheitsgrade und Zwangskräfte

In dieser Aufgabe werden wir herausfinden, wie man Einschränkungen auf der Bewegung von Körpern einsetzen kann. Diese Aufgabe nutzt als Einführung zur Lagrangemechanik.

Betrachten Sie eine Masse m am Ende eines steifen massenlosen Pendels der Länge R. Das Pendel wird am Ursprung $(0,0,0)$ befestigt und darf sich nur in der x–z–Ebene bewegen. Das Gravitationsfeld ist homogen und wirkt in die $-z$-Richtung.



(a) Die Masse m kann sich nicht an einem beliebigen Ortspunkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ befinden, da sie am Ende des Pendels befestigt ist. Schreiben Sie alle Bedingungen auf, die die Koordinaten (x,y,z) der Masse erfüllen müssen.

Lösung: The pendulum is restricted to swing in the x–z plane, meaning that the mass' position must satisfy

$$y = 0\ . \tag{s.13}$$

Furthermore, the pendulum is rigid and the mass must therefore remain at a distance R from the origin:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2\ . \tag{s.14}$$

The latter condition can also equivalently be written as $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = R$, or also as $x^2 + z^2 = R^2$ by integrating the first constraint.

(b) Für dieses Problem sind sphärische Koordinaten (r, θ, ϕ), mit θ von der $-z$-Achse gemessen, besser geeignet (siehe obige Abbildung). Schreiben Sie alle Bedingungen auf die die Koordinaten (r, θ, ϕ) der Masse erfüllen müssen.

Lösung: In spherical coordinates we find that the first constraint is enforced by requiring

$$\phi = 0 \ . \tag{s.15}$$

(The position of the mass with a negative x value can be described with $\phi = 0$ by allowing θ to take negative values.)

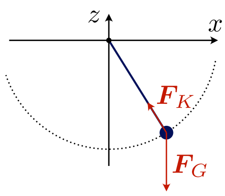
The second constraint is simply

$$r = R \ . \tag{s.16}$$

Wir möchten nun die Bewegungsgleichungen für die Masse finden.

(c) Skizzieren Sie, wie die Gravitationskraft $\boldsymbol{F}_G$ sowie die Kontaktkraft $\boldsymbol{F}_K$, die die Masse auf der Pendel befestigt, auf die Masse wirken. Wirken auf die Masse weitere Kräfte?

Lösung: Two forces act on m, the gravitational force $\boldsymbol{F}_G$ and the contact force $\boldsymbol{F}_K$ exerted by the pendulum's rigid rod onto the mass.



(One could be tempted to include a "constraint force" in the diagram. But that force is not an independent force, rather, it is a "role" that is fulfilled by the other two forces. I.e., when applying Newton's second law and summing the forces acting on the mass, you shouldn't add a third "constraint" force. Here, $\boldsymbol{F}_K$ acts as the constraint force.)

(d) Schreiben Sie Newtons 2. Gesetz für die Masse m in der Basis $\hat{\boldsymbol{e}}_r, \hat{\boldsymbol{e}}_\phi, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta$, und finden Sie die Bewegungsgleichungen für (r, θ, ϕ).

Hinweis. Zeigen Sie zuerst, dass $\ddot{\boldsymbol{r}} = -R\dot{\theta}^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_r + R\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$, wobei $\boldsymbol{r}$ der Ortvektor von die Masse m ist. Argumentieren Sie zudem, dass die Kraft $\boldsymbol{F}_K$ entlang $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ wirken muss.

Lösung: Newton's second law states that the sum of all forces acting on a point mass m must be equal to the mass times the point mass' acceleration:

$$\boldsymbol{F}_K + \boldsymbol{F}_G = m\,\ddot{\boldsymbol{r}} \ . \tag{s.17}$$

We first consider the right hand side of this equation and we compute $\ddot{\boldsymbol{r}}$ in spherical coordinates. Recall the basis vectors (e.g., with a sketch, or by studying how perturbations $r \to r + dr$, $\phi \to \phi + d\phi$, $\theta \to \theta + d\theta$ are written in Cartesian coordinates)

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \begin{bmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix} \ ; \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} \ ; \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \ . \tag{s.18}$$

Then with $\dot{\phi} = 0$ and $\dot{r} = 0$ we find

$$\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r = \begin{bmatrix} \dot{\theta}\,\cos\phi\cos\theta \\ \dot{\theta}\,\sin\phi\cos\theta \\ \dot{\theta}\sin\theta \end{bmatrix} = \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \ ; \qquad \dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_\theta = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\,\cos\phi\sin\theta \\ -\dot{\theta}\,\sin\phi\sin\theta \\ \dot{\theta}\,\cos\theta \end{bmatrix} = -\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{e}}_r \ . \tag{s.19}$$

We then find

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{d^2}{dt^2}\left(r\,\hat{\boldsymbol{e}}_r\right) = \frac{d}{dt}\left(R\,\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r\right) = \frac{d}{dt}\left(R\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\right) = R\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta - R\dot{\theta}^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_r \ . \tag{S.20}$$

We now concentrate on the left hand side of (S.17). The pendulum rod does not have any means to do any work, so the force $\boldsymbol{F}_K$ it exerts on the mass must necessarily be orthogonal to the mass' motion. Since the mass' motion is along the $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ direction, the force $\boldsymbol{F}_K$ must lie in the plane spanned by $\hat{\boldsymbol{e}}_r, \hat{\boldsymbol{e}}_\phi$. Since the mass' movement is constrained to $\phi = 0$, the force $\boldsymbol{F}_K$ cannot have any component along $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$, else it would induce a movement of the mass in the $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ direction. Overall, we must have $\boldsymbol{F}_K = -\alpha_r \hat{\boldsymbol{e}}_r$ for some α_r to be determined.

The gravitational force is

$$\boldsymbol{F}_G = -mg\,\hat{\boldsymbol{e}}_z = -mg\left(-\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_r + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\right) = mg\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_r - mg\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \ , \tag{S.21}$$

where we expanded $\hat{\boldsymbol{e}}_z$ in the basis $\hat{\boldsymbol{e}}_r, \hat{\boldsymbol{e}}_\phi, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta$. The latter expansion can either be guessed by staring at (S.18)[1], by drawing a sketch, or by inverting the rotation matrix that maps $(\hat{\boldsymbol{e}}_x, \hat{\boldsymbol{e}}_y, \hat{\boldsymbol{e}}_z)$ to $(\hat{\boldsymbol{e}}_r, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta, \hat{\boldsymbol{e}}_\phi)$.

The sum of the two forces is then

$$\boldsymbol{F}_K + \boldsymbol{F}_G = \big(-\alpha_r + mg\cos\theta\big)\,\hat{\boldsymbol{e}}_r - mg\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \ . \tag{S.22}$$

Plugging into Newton's second law, given by (S.17), we find

$$\big(-\alpha_r + mg\cos\theta\big)\,\hat{\boldsymbol{e}}_r - mg\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = m\big(R\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta - R\dot{\theta}^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_r\big) \ . \tag{S.23}$$

Projecting the above expression along the direction $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$, we find $mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$. This gives us the equation of motion for θ:

$$R\ddot{\theta} = -g\sin\theta \ . \tag{S.24}$$

The other coordinates are fixed by the constraints and have trivial equations of motion, namely $r = R$ and $\phi = 0$.

(e) Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Geben Sie unabhängigen Parameter an, die das System vollständig parametrisieren.

Lösung: The system only has a single degree of freedom: The mass without any constraints would have three degrees of freedom as a point in $\mathbb{R}^3$, but the two constraints remove one degree of freedom each.

The coordinate θ is a natural choice to parametrize the degree of freedom of the system.

Other choices of a parameter are possible. For instance, the x coordinate would also do the job (as long as $|\theta| \leq \pi/2$), as it uniquely determines the position of the mass once we account for the constraints. However, this choice would turn out to be less convenient for calculations in the Lagrangian formalism as the constrained parameters y, z would then have to be expressed explicitly in terms of x. In contrast, the choice of θ in spherical coordinates has the advantage that the remaining parameters r, ϕ are independent of θ.

Wir definieren die *Lagrangefunktion* $L(\theta, \dot{\theta}) = T(\dot{\theta}) - V(\theta)$, wobei T (V) die kinetische Energie (potenzielle Energie) des Systems ist, ausgedruckt als Funktion von $\dot{\theta}$ (bzw. θ). In der Lagrangemechanik zweiter Art werden Sie sehen, dass die Euler-Lagrange Gleichung gilt:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \ . \tag{4}$$

[1] Pick $-\cos\theta$ as a coefficient in front of $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ and $\sin\theta$ as a coefficient in front of $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ to make the linear combination of these two have a z component equal to 1; then, you can check that this linear combination also has vanishing x and y components.

(f) Verifizieren Sie, dass die Euler-Lagrange Gleichung zur gleichen Bewegungsgleichung für θ führt wie die, die in (d) gefunden wurde.

Lösung: We first express the kinetic energy $T = \frac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{r}}|^2$ in terms of $\dot{\theta}$. Recall that

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}\big(r\,\hat{\boldsymbol{e}}_r\big) = R\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \ , \tag{S.25}$$

and thus

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 \ . \tag{S.26}$$

On the other hand, the potential energy is given solely by the gravitational field as

$$V = mgz = mgR\big(1 - \cos\theta\big) \ . \tag{S.27}$$

Observing that here, T depends only on $\dot{\theta}$ and V depends only on θ, we can compute

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \ ; \qquad\qquad \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial V}{\partial\theta} = -mgR\sin\theta \ , \tag{S.28}$$

and

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mR^2\ddot{\theta} \ . \tag{S.29}$$

Therefore the Euler-Lagrange equation gives us

$$-mgR\sin\theta - mR^2\ddot{\theta} = 0 \ , \tag{S.30}$$

which coincides exactly with the equation of motion (S.24) that we found in (d).

(g) Versuchen Sie, die Euler-Lagrange Gleichung bezüglich die x-Koordinate statt der θ-Koordinate anzuwenden, d.h., berechnen Sie $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$, indem T, V bezüglich $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ausgedrückt werden. Gilt die Euler-Lagrange Gleichung immer noch in diesem Fall?

Lösung: We can express T and V in terms of $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ instead of $\theta, \dot{\theta}$. This gives us

$$T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\big) \ ; \qquad\qquad V(x, y, z) = mgz \ . \tag{S.31}$$

If we define $L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) - V(x, y, z)$, we can compute

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial\dot{x}} = m\dot{x} \quad \to \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = m\ddot{x} \ ; \qquad\qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \ . \tag{S.32}$$

We then have

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} \ . \tag{S.33}$$

The Euler-Lagrange equation would state that $m\ddot{x} = 0$, but we know that this is clearly not the correct equation of motion of the system. (It's the equation of motion of a particle moving uniformly in 1D!) Clearly, a naive application of the Euler-Lagrange equation does not hold for the parameter x.

Long remark: Here, the problem is that we did not include the constraints in the formalism. To apply the Euler-Lagrange equations, we must be sure that T, V are expressed in terms of *independent* degrees of freedom of the problem, and that there are no constraints that tie together the different variables. Here, x, y, z are not independent degrees of freedom, since

$y = 0$ and z depends on x via the constraints. Actually, we can choose to express T, V in terms of x and $\dot{x}$ only, by substituting out $y, z, \dot{y}, \dot{z}$ using the constraints as

$$y = 0 \; ; \qquad \dot{y} = 0 \; ; \qquad z = -\sqrt{R^2 - x^2} \; ; \qquad \dot{z} = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{R^2 - x^2}} \; , \tag{s.34}$$

and we find

$$T(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \Big(\dot{x}^2 + \frac{x^2 \dot{x}^2}{R^2 - x^2} \Big) \; ; \qquad V(x) = -mg\sqrt{R^2 - x^2} \; , \tag{s.35}$$

noting that T now also depends on x; this leads us to the Lagrangian

$$L(x, \dot{x}) = T - V = \frac{1}{2} m \Big(\dot{x}^2 + \frac{x^2 \dot{x}^2}{R^2 - x^2} \Big) + mg\sqrt{R^2 - x^2} \; . \tag{s.36}$$

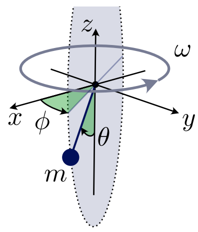
Writing out the Euler-Lagrange equation becomes pretty messy, but the equation does hold! If you have time to waste, you're welcome to try to work it out. The important steps are

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \cdots = \frac{m x \dot{x}^2}{R^2 - x^2} + \frac{m x^3 \dot{x}^2}{2(R^2 - x^2)^2} - \frac{mgx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \; ; \tag{s.37}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \cdots = m\ddot{x} + \frac{2x\dot{x}^2 + x^2 \ddot{x}}{R^2 - x^2} + \frac{2x^3 \dot{x}^2}{(R^2 - x^2)^2} \; . \tag{s.38}$$

You can then check that by writing the Euler-Lagrange equation plugging in $x = R \sin\theta$, $\dot{x} = R\dot{\theta} \cos\theta$, $\ddot{x} = R\ddot{\theta} \cos\theta - R\dot{\theta}^2 \sin\theta$, we find the same equations of motion for θ as we had above. You see how important it is to choose your parametrization cleverly to avoid lengthy calculations!

Das Pendel wird nun so befestigt, dass es sich mit konstanter Winkelgeschwindigket ω sich um der z-Achse dreht, sodass sich die Ebene, in welcher das Pendel schwingt, um die z-Achse dreht.



(h) Geben Sie alle die Zwangsbedingungen als Gleichungen in der Form $S_i(r, \phi, \theta, t) = 0$, mit eine Funkion S_i für jede Zwangsbedingung an.

Lösung: We have two constraints:

$$\phi = \omega t \; ; \qquad r = R \; . \tag{s.39}$$

We can write these in the requested form by defining the functions

$$S_1(r, \phi, \theta, t) = \phi - \omega t \; ; \qquad S_2(r, \phi, \theta, t) = r - R \; . \tag{s.40}$$

The constraints are then given as

$$S_1(r, \phi, \theta, t) = 0 \; ; \qquad S_2(r, \phi, \theta, t) = 0 \; . \tag{s.41}$$

Aus dem d'Alembertsche Prinzip wissen wir, dass Zwangskräfte immer senkrecht zur Mannigfaltigkeit der möglichen Parameterwerten wirken. Äquivalent ist, dass die gesamte Zwangskraft eine lineare Kombination der Gradienten $\nabla S_i(r, \phi, \theta, t)$ sein muss.

(i) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla S_i(r, \phi, \theta, t)$ für jede Zwangsbedingung und schreiben Sie die allgemeine Form der gesamten Zwangskraft. Stellen Sie Newtons 2. Gesetz auf und finden side die Bewegungsgleichungen für (r, θ, ϕ).

Hinweis. In den Koordinaten (r, ϕ, θ) gilt $\nabla = \hat{\boldsymbol{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$.

Lösung: Using the expression of ∇ in spherical coordinates we can compute

$$\nabla S_1 = \frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \ ; \qquad\qquad \nabla S_2 = \hat{\boldsymbol{e}}_r \ . \tag{S.42}$$

The constraint force $\boldsymbol{Z}$, which is in fact the force that the pendulum rod exerts on the mass (we called it $\boldsymbol{F}_K$ above), must be of the form

$$\boldsymbol{Z} = \lambda_1\nabla S_1 + \lambda_2\nabla S_2 = \lambda_2\,\hat{\boldsymbol{e}}_r + \frac{\lambda_1}{r\sin\theta}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \ . \tag{S.43}$$

The gravitational force is as before

$$\boldsymbol{F}_G = -mg\,\hat{\boldsymbol{e}}_z = mg\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_r - mg\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \ . \tag{S.44}$$

The sum of the forces acting on the mass is therefore

$$\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{F}_G = \big(\lambda_2 + mg\cos\theta\big)\,\hat{\boldsymbol{e}}_r + \frac{\lambda_1}{r\sin\theta}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi - mg\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \ . \tag{S.45}$$

As above, in order to write Newton's second law in spherical coordinates, we need to compute $\ddot{\boldsymbol{r}}$ in these coordinates. We cannot immediately use the expression (S.20) because that expression is only valid when $\phi = 0$ stays constant. Using $\dot{r} = 0$ and $\dot{\phi} = \omega$ we then calculate

$$\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r = \begin{bmatrix} -\dot{\phi}\sin\phi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\phi\cos\theta \\ \dot{\phi}\cos\phi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\phi\cos\theta \\ \dot{\theta}\sin\theta \end{bmatrix} = \omega\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \ ; \tag{S.46}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_\phi = \begin{bmatrix} -\dot{\phi}\cos\phi \\ -\dot{\phi}\sin\phi \\ 0 \end{bmatrix} = -\dot{\phi}\,\big(\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_r + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\big) = -\omega\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_r - \omega\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \ ; \tag{S.47}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_\theta = \begin{bmatrix} -\dot{\phi}\sin\phi\cos\theta - \dot{\theta}\cos\phi\sin\theta \\ \dot{\phi}\cos\phi\cos\theta - \dot{\theta}\sin\phi\sin\theta \\ \dot{\theta}\cos\theta \end{bmatrix} = \omega\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi - \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{e}}_r \ . \tag{S.48}$$

Then

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}\big(r\hat{\boldsymbol{e}}_r\big) = R\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r = R\omega\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + R\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \ , \tag{S.49}$$

and

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}} &= R\omega\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + R\omega\sin\theta\,\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_\phi + R\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + R\dot{\theta}\,\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_\theta \\ &= R\big(-\omega^2\sin^2\theta + \omega\dot{\theta}\cos\theta\big)\hat{\boldsymbol{e}}_r + R\big(\omega\dot{\theta}\sin\theta + \omega\cos\theta\big)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + R\big(\ddot{\theta} - \omega^2\sin\theta\cos\theta\big)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \ .\end{aligned} \tag{S.50}$$

Now we can write out Newton's second law. Plugging the expressions (S.45) and (S.50) into $\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{F}_G = m\ddot{\boldsymbol{r}}$, and separating the equation by components along $\hat{\boldsymbol{e}}_r, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta, \hat{\boldsymbol{e}}_\phi$, we obtain:

Along $\hat{\boldsymbol{e}}_r$: $$\lambda_2 + mg\cos\theta = -mR\omega^2\sin^2\theta + mR\omega\dot{\theta}\cos\theta \ ; \tag{S.51a}$$

Along $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$: $$\frac{\lambda_1}{r\sin\theta} = mR\omega\dot{\theta}\sin\theta + mR\omega\cos\theta \ ; \tag{S.51b}$$

Along $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$: $$-mg\sin\theta = mR\ddot{\theta} - mR\omega^2\sin\theta\cos\theta \ . \tag{S.51c}$$

From (S.51c) we can read off the equation of motion for θ,

$$R\ddot{\theta} = R\omega^2\sin\theta\cos\theta - g\sin\theta \ . \tag{S.52}$$

It turns out that we were lucky and we didn't need to find the values of λ_1, λ_2 to determine the equations of motion of the system. They would be needed, however, if we would like to determine the magnitude of the constraint forces. In that case, their values can be determined using (S.51a) and (S.51b).