Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2022

Übungsblatt 6
Taylorreihe und Lagrange-Gleichungen 1. Art

Abgabe bis: 03.06.2022 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Taylorreihe

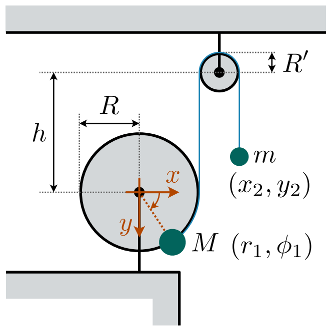
Berechnen Sie die Taylorreihen der folgenden Ausdrücken bis zur 2. Ordnung in x in der Umgebung von $x \approx 0$. (Wir nehmen an, dass $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.)

(a) $\frac{d+ex}{a+bx+cx^2}$;

(b) $\frac{2}{\sqrt{a^2+x^2}}$;

(c) $\ln(a\cos(x) + b\sin(x))$.

Aufgabe 2: Reifen und Rolle



Eine Punktmasse M ist an einem masselosen Reifen mit Radius R angebracht. Der Reifen kann frei um sein fixiertes Zentrum rotieren. An M ist ein masseloses Seil befestigt, das zunächst entlang des Reifens verläuft und dann senkrecht nach oben über eine masselose Rolle führt. Reifen und Rolle liegen in derselben Ebene. Am anderen Ende des Seils hängt eine Punktemasse m.

Nehmen Sie an, dass m sich nur in Richtung der Gravitationskraft bewegen kann, dass $M > m$ und, dass das Seil lang genug ist, damit m niemals über die Rolle gezogen wird.

(a) Identifizieren Sie die Zwangsbedingungen $S_i(r_1, \phi_1, x_2, y_2) = 0$ auf die Koordinaten der Massen. Wie viele unabhängige Freiheitsgrade hat das System?

(b) Leite Sie die Bewegungsgleichungen für die Massen her.
Hinweis: Beachten Sie, dass die jeweiligen Koordinaten in unterschiedlichen Koordinatensystemen angegeben sind. Der Gradient einer (stetig differentierbaren) Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *ist in Polarkoordinaten über*

$$\nabla_2 f(r, \phi) = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\mathbf{e}}_\phi$$

gegeben.

(c) Bestimme die Orte der Massen an denen Sie sich im Gleichgewicht befinden.

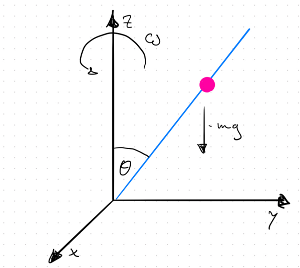
(d) Berechne die Kraft, der das Seil im Gleichgewicht Stand halten muss.

(e) Entwickle die Bewegungsgleichungen um den Gleichgewichtspunkt bis zur ersten Ordnung. Handelt es sich um einen stabilen oder instabilen Gleichgewichtspunkt? Falls er stabil ist, was ist die Frequenz mit der das System um das diesen Punkt schwingt?

Hinweis: Schreibe die Orstkoordinaten als $\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{\epsilon}$, *wobei* $\boldsymbol{r}_0$ *der Gleichgewichtspunkt ist, und entwickeln beide Seiten der Bewegungsgleichungen um* $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}$.

Aufgabe 3: Perle auf Stab

Wir betrachten eine Perle, idealisiert als Massenpunkt der Masse m, die reibungsfrei auf einem Draht gleitet, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und konstantem Neigungswinkel θ um eine Achse rotiert. Die Perle ist außerdem der Gravitationskraft $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$ ausgesetzt, die entlang der Rotationsachse wirkt.



In einer vorherigen Aufgabe haben wir die Zwangskräfte für dieses System bereits aus bekannten Formeln wie beispielsweise der Zentripetalkraft für Kreisbewegungen berechnet. Nun wollen wir die Zwangskräfte mit Hilfe des Lagrange-Formalismus direkt aus den Zwangsbedingungen berechnen.

Dazu eigenen sich natürlich wiederum Kugelkoordinaten. Der Ort der Perle ist gegebn durch $\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{e}}_r$. Die Basisvektoren in Kugelkoordinaten sind folgt gegeben :

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie die Zwangsbedingungen $S_j(\boldsymbol{r}, t)$ für die Bewegung der Perle an.

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass sogenannte *Zwangskräfte* $\lambda_j \nabla S_j$ mit Lagrange Multiplikatoren $\lambda_j \in \mathbb{R}$ die Bedingungen S_j in der Bewegung erzwingen.

(b) Stellen Sie die Lagrangegleichungen 1. Art auf.

Hinweis 1: Die Beschleunigung in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) ist gegeben als

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2(\vartheta)\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} - r\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_\vartheta + ((r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin(\vartheta) + 2r\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos(\vartheta))\boldsymbol{e}_\varphi$$

Hinweis 2: In Kugelkoordinaten ist ∇ gegeben durch:

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

(c) Bestimmen Sie explizit die wirkenden Zwangskräfte in Abhängigkeit von $\theta, \omega, r, \dot{r}$.

Hinweis: Setzen Sie die Zwangsbedingungen in die anderen Gleichungen ein und bestimmen Sie λ_j.

Nach Einbeziehung der Zwangsbedingungen und Zwangskräfte gilt für die $\boldsymbol{e}_r$-Komponente folgende Bewegungsgleichung:

$$m(\ddot{r} - r\sin^2(\theta)\omega^2) = -mg\cos\theta$$

(d) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangswerte $r(t=0) = r_0, \dot{r}(t=0) = 0$.

Hinweis: Nutzen Sie hierbei, dass Sie in einem früheren Aufgabenblatt schon eine spezielle Lösung gefunden haben:

$$\ddot{r} = 0 \quad \text{für} \quad r = \frac{g\cos(\theta)}{\omega^2\sin^2(\theta)}$$