Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2022

Übungsblatt 6
Taylorreihe und Lagrange-Gleichungen 1. Art

Abgabe bis: 03.06.2022 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Taylorreihe

Berechnen Sie die Taylorreihen der folgenden Ausdrücken bis zur 2. Ordnung in x in der Umgebung von $x \approx 0$. (Wir nehmen an, dass $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.)

(a) $\frac{d+ex}{a+bx+cx^2}$;

(b) $\frac{2}{\sqrt{a^2+x^2}}$;

(c) $\ln(a\cos(x) + b\sin(x))$.

Lösung: Please refer to the handwritten solutions on the following page—

Recall the following standard Taylor expansions around $x \approx 0$:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + O(x^3) \; ; \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \; ;$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4) \; ; \qquad \sin(x) = x + O(x^3) \, .$$

<u>(a)</u>: Let $b' = \frac{b}{a}$ and $c' = \frac{c}{a}$. Then:

$$\frac{d+ex}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{a}(d+ex)(1+b'x+c'x^2)^{-1}$$

$$= \frac{1}{a}(d+ex)\Big(1 - (b'x+c'x^2) + \underbrace{\frac{2}{2!}(b'x+O(x^2))^2}_{= b'^2 x^2 + O(x^3)}\Big) + O(x^3)$$

$$= \frac{1}{a}(d+ex)\left(1 - b'x + (b'^2 - c')x^2\right) + O(x^3)$$

$$= \underline{\frac{d}{a} + \frac{e-db'}{a} x + \left[\frac{d}{a}(b'^2 - c') - \frac{eb'}{a}\right] x^2 + O(x^3)} \, .$$

<u>(b)</u>: $$\frac{2}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{2}{a}\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{a}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + O(x^4)\right)$$

$$= \underline{\frac{2}{a} - \frac{x^2}{a^3} + O(x^4)} \, .$$

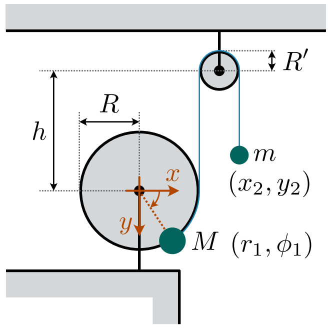
(c):

$$\ln(a\cos(x) + b\sin(x)) = \ln\left(a - \frac{ax^2}{2} + bx + O(x^3)\right)$$

$$= \ln(a) + \ln\left[1 + \frac{b}{a}x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right]$$

$$= \ln(a) + \frac{b}{a}x - \frac{x^2}{2} - \frac{b^2x^2}{2a^2} + O(x^3).$$

Aufgabe 2: Reifen und Rolle



Eine Punktmasse M ist an einem masselosen Reifen mit Radius R angebracht. Der Reifen kann frei um sein fixiertes Zentrum rotieren. An M ist ein masseloses Seil befestigt, das zunächst entlang des Reifens verläuft und dann senkrecht nach oben über eine masselose Rolle führt. Reifen und Rolle liegen in derselben Ebene. Am anderen Ende des Seils hängt eine Punktemasse m.

Nehmen Sie an, dass m sich nur in Richtung der Gravitationskraft bewegen kann, dass $M > m$ und, dass das Seil lang genug ist, damit m niemals über die Rolle gezogen wird.

(a) Identifizieren Sie die Zwangsbedingungen $S_i(r_1, \phi_1, x_2, y_2) = 0$ auf die Koordinaten der Massen. Wie viele unabhängige Freiheitsgrade hat das System?

(b) Leite Sie die Bewegungsgleichungen für die Massen her.
Hinweis: Beachten Sie, dass die jeweiligen Koordinaten in unterschiedlichen Koordinatensystemen angegeben sind. Der Gradient einer (stetig differentierbaren) Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist in Polarkoordinaten über

$$\nabla_2 f(r, \phi) = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\mathbf{e}}_\phi$$

gegeben.

(c) Bestimme die Orte der Massen an denen Sie sich im Gleichgewicht befinden.

(d) Berechne die Kraft, der das Seil im Gleichgewicht Stand halten muss.

(e) Entwickle die Bewegungsgleichungen um den Gleichgewichtspunkt bis zur ersten Ordnung. Handelt es sich um einen stabilen oder instabilen Gleichgewichtspunkt? Falls er stabil ist, was ist die Frequenz mit der das System um das diesen Punkt schwingt?

Lösung: Please refer to the handwritten solutions on the following page—

(a) The mass M is on the first pulley $\rightarrow$ $r_1 \overset{!}{=} R$

$\rightarrow$ constraint function $\boxed{S_1(r_1, \phi_1, x_2, y_2) = r_1 - R}$

The mass m only moves vertically $\rightarrow$ $x_2 \overset{!}{=} R + 2R'$

$\rightarrow$ define $\boxed{S_2(r_1, \phi_1, x_2, y_2) = x_2 - (R + 2R')}$

The string restricts the two masses' movement $\rightarrow$

$$\underbrace{r_1}_{=R} \phi_1 + h + \pi R' + (h + y_2) \overset{!}{=} l = \text{total length of the string}$$

$\rightarrow$ define $\boxed{S_3(r_1, \phi_1, x_2, y_2) = R\phi_1 + y_2 - l_0}$

with $l_0 = l - 2h - \pi R'$

There are 4 coordinates (r_1, ϕ_1, x_2, y_2) and 3 constraints $\rightarrow$ there only remains <u>1 degree of freedom</u>.

(b) We first compute $\ddot{\vec{r}}_1$ and $\ddot{\vec{r}}_2$.

$\vec{r}_1$ = position vector of M
$\vec{r}_2$ = ——— m

$$\dot{\vec{r}}_1 = R\dot{\hat{e}}_{r_1} = R\dot{\phi}_1 \hat{e}_{\phi_1} \rightarrow \underline{\ddot{\vec{r}}_1 = R\ddot{\phi}_1 \hat{e}_{\phi_1} - R\dot{\phi}_1^2 \hat{e}_r}$$

(use $\hat{e}_{r_1} = \cos(\phi_1)\hat{e}_{x_1} + \sin(\phi_1)\hat{e}_{y_1}$, $\hat{e}_{\phi_1} = -\sin(\phi_1)\hat{e}_{x_1} + \cos(\phi_1)\hat{e}_{y_1}$

$\rightarrow$ $\dot{\hat{e}}_{r_1} = \dot{\phi}_1 \hat{e}_{\phi_1}$ and $\dot{\hat{e}}_{\phi_1} = -\dot{\phi}_1 \hat{e}_{r_1}$)

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \ddot{x}_2 \hat{e}_{x_2} + \ddot{y}_2 \hat{e}_{y_2} \quad \text{(in Cartesian coordinates)}$$

Now we need the gradients of the constraints.

In our choice of coordinates (r_1, ϕ_1, x_2, y_2) for the two masses we have

$$\nabla = \hat{e}_{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{e}_{y_2} \frac{\partial}{\partial y_2} + \hat{e}_{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} + \hat{e}_{\phi_1} \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial \phi_1} .$$

Then we can compute

$$\nabla S_1 = \hat{e}_{r_1}$$

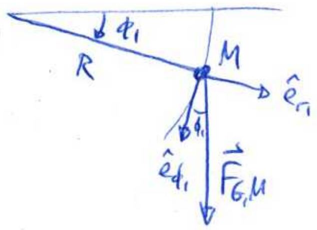
$$\nabla S_2 = \hat{e}_{x_2}$$

$$\nabla S_3 = \frac{R}{r_1} \hat{e}_{\phi_1} + \hat{e}_{y_2} = \hat{e}_{\phi_1} + \hat{e}_{y_2} .$$

$r_1 = R$ via first constraint

The force exerted by gravity on M is

$$\vec{F}_{G,M} = Mg \sin(\phi_1)\, \hat{e}_{r_1} + Mg \cos(\phi_1)\, \hat{e}_{\phi_1}$$



The force on m is

$$\vec{F}_{G,m} = mg \cdot \hat{e}_{y_2}$$

From Lagrange 1 we know that

$$M\ddot{\vec{r}}_1 + m\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{G,M} + \vec{F}_{G,m} + \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \nabla S_j$$

⚠ these vectors live in disjoint subspaces $[(r_1,\phi_1)$ vs $(x_2,y_2)]$ of the 4-dimensional space associated with (r_1, ϕ_1, x_2, y_2)

Or equivalently:

$$M\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{G,M} + \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \nabla_1 S_j \quad \text{and} \quad m\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{G,m} + \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \nabla_2 S_j$$

We find, along $\hat{e}_{\phi_1}$:

$$\underline{MR\ddot{\phi}_1 = Mg\cos(\phi_1) + \lambda_3} \qquad (I)$$

Along $\hat{e}_{y_2}$:

$$\underline{m\ddot{y}_2 = mg + \lambda_3} \qquad (II)$$

together with the constraint $S_3(r_1, \phi_1, x_2, y_2) \stackrel{!}{=} 0$
i.e. $\ddot{y}_2 = -R\ddot{\phi}_1$

We subtract (II) from (I) and use $\ddot{y}_2 = -R\ddot{\phi}_1$ $\rightarrow$

$$\boxed{(M+m)R\ddot{\phi}_1 = Mg\cos(\phi_1) - mg}$$

equation of motion for ϕ_1

The equation of motion for y_2 follows from $y_2 \stackrel{!}{=} l_0 - R\phi_1$ $\rightarrow$

$$\underline{(M+m)\ddot{y}_2 = -Mg\cos\left(\frac{y_2 - l_0}{R}\right) + mg}$$

The equations of motion for r_1 and x_2 are simply $\underline{r_1 = R}$ and $\underline{x_2 = R + 2R'}$

c) Set acceleration to zero. Using the equation of motion for ϕ_1 we find:

$$Mg\cos(\phi_1) - mg = 0$$

$$\cos(\phi_1) = \frac{m}{M}$$

$$\phi_1 = \cos^{-1}\left(\frac{m}{M}\right)$$

Note that $\cos^{-1}\left(\frac{m}{M}\right)$ is only well defined if $m < M$

Using the equation for y_2:

$$-Mg\cos\left(\frac{y_2 - l_0}{R}\right) + mg = 0$$

$$\frac{y_2 - l_0}{R} = \cos^{-1}\left(\frac{m}{M}\right)$$

$$y_2 = R\phi_1 + l_0$$

d) From Lagrange 1 in question a)

1) $Mr\ddot{\phi}_1 = Mg\cos(\phi_1)+\lambda_3$

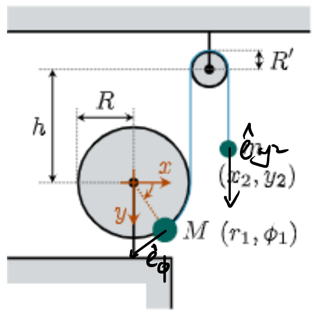
2) $m\ddot{y}_2 = mg+\lambda_3$

Easiest to use 2) but 1) gives the same answer.

At equilibrium $\ddot{y}_2 = 0$

$$mg+\lambda_3=0$$

$$\lambda_3=-mg$$



$$F = \lambda_3 \nabla S_3$$

$$= -mg(\hat{e}_{\phi_1}+\hat{e}_{y_2})$$

So the tension force on the rope is

$F=-mg\hat{e}_{y_2}$ at m

or

$F=-mg\hat{e}_{\phi_1}$ at M

e) In question c) we found the equilibrium point:

$$\phi_0 = \cos^{-1}\left(\frac{m}{M}\right)$$

Now, as the hint states, expand around $\phi_0 = \phi_0+\Delta\phi$.

Insert this into the equation of motion to find:

$$(M+m)R\Delta\ddot{\phi}_0 = Mg\underbrace{\cos(\phi_0+\Delta\phi)} - mg$$

Taylor expand this to first order:

$$= \cos(\phi_0)+\Delta\phi\left(-\sin(\phi_0)\right)+O(\Delta\phi^2)$$

$$\approx \frac{m}{M}+\Delta\phi\left(-\underbrace{\sin(\phi_0)}\right)$$

$$\sin(\phi_0) = \sin\cos^{-1}\left(\frac{m}{M}\right)$$

$$= \sqrt{\sin^2\left(\cos^{-1}\left(\frac{m}{M}\right)\right)}$$

$$= \sqrt{1-\cos^2\left(\cos^{-1}\left(\frac{m}{M}\right)\right)} = \sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}}$$

This gives:

$$\Delta\ddot{\phi} = \frac{-\sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}}}{R(M+m)}\Delta\phi = -\lambda\Delta\phi$$

$\Delta\ddot{\phi} = -\lambda\Delta\phi$ is stable/oscillating for $\lambda > 0$. Here $\lambda > 0$ if

$$\sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}} > 0$$

$$m < M$$

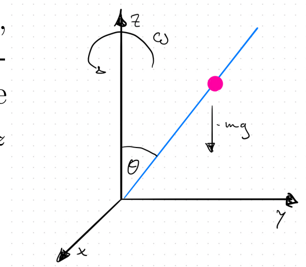
$\Delta\ddot{\phi} = -\lambda\Delta\phi$ is stationary if $\lambda = 0$

$$\sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}} = 0 \longrightarrow m = M$$

As noted in c) the equation of motion is not well defined for $m > M$. There is no equilibrium to analyse in this case, the system would accelarate.

Aufgabe 3: Perle auf Stab

Wir betrachten eine Perle, idealisiert als Massenpunkt der Masse m, die reibungsfrei auf einem Draht gleitet, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und konstantem Neigungswinkel θ um eine Achse rotiert. Die Perle ist außerdem der Gravitationskraft $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$ ausgesetzt, die entlang der Rotationsachse wirkt.



In einer vorherigen Aufgabe haben wir die Zwangskräfte für dieses System bereits aus bekannten Formeln wie beispielsweise der Zentripetalkraft für Kreisbewegungen berechnet. Nun wollen wir die Zwangskräfte mit Hilfe des Lagrange-Formalismus direkt aus den Zwangsbedingungen berechnen.

Dazu eigenen sich natürlich wiederum Kugelkoordinaten. Der Ort der Perle ist gegebn durch $\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{e}}_r$. Die Basisvektoren in Kugelkoordinaten sind folgt gegeben :

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie die Zwangsbedingungen $S_j(\boldsymbol{r}, t)$ für die Bewegung der Perle an.

Lösung: Der rotierende Stab stellt zwei Zwangsbedingungen, die die Bewegungsfreiheit der Perle in drei Dimensionen auf eine Dimension einschränken.

Zum einen ist der Winkel ϑ, in dem der rotierende Stab zur Rotationsachse in z-Richtung steht, gegeben durch θ. Das gibt uns

$$S_1(r, \varphi, \vartheta, t) = \vartheta - \theta = 0.$$

Zum anderen ist der Azimuthwinkel φ stets durch die Rotation des Stabes um die Achse gegeben und verändert sich mit Winkelgeschwindigkeit ω. Wir wählen die Ausrichtung unseres Koordinatensystems nun so, dass $\varphi = 0$ bei $t = 0$ gilt, sodass

$$S_2(r, \varphi, \vartheta, t) = \varphi - \omega t = 0.$$

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass sogenannte *Zwangskräfte* $\lambda_j \nabla S_j$ mit Lagrange Multiplikatoren $\lambda_j \in \mathbb{R}$ die Bedingungen S_j in der Bewegung erzwingen.

(b) Stellen Sie die Lagrangegleichungen 1. Art auf.

Hinweis 1: Die Beschleunigung in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) ist gegeben als

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2(\vartheta)\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} - r\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_\vartheta + ((r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin(\vartheta) + 2r\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos(\vartheta))\boldsymbol{e}_\varphi$$

Hinweis 2: In Kugelkoordinaten ist ∇ gegeben durch:

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

Lösung: Die Lagrangegleichungen erster Art sind durch die $3 + 2$ Gleichungen

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) + \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = \nabla U(\boldsymbol{r}, t) + \nabla\sum_{j=1}^{2}\lambda_j S_j(\boldsymbol{r}, t)$$

$$S_j(\boldsymbol{r}, t) = 0,$$

gegeben. Hierbei ist $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2$ die Zwangskraft, die durch die Zwangsbedingungen S_1 und S_2 auf die Perle wirkt. Wir finden also

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -mg\boldsymbol{e}_z + \lambda_1 \nabla(\vartheta - \theta) + \lambda_2 \nabla(\varphi - \omega t).$$

Nun verwenden wir den Gradienten in Kugelkoordinaten, um die Zwangskräfte zu bestimmen:

$$Z_1(r,\varphi,\vartheta) = \lambda_1 \nabla(\vartheta - \theta) = \lambda_1 \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\vartheta \partial_\vartheta(\vartheta - \theta) = \lambda_1 \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\vartheta \tag{s.1}$$

$$Z_2(r,\varphi,\vartheta) = \lambda_2 \nabla(\varphi - \omega t) = \lambda_2 \frac{1}{r\sin\vartheta}\boldsymbol{e}_\varphi \partial_\varphi(\varphi - \omega t) = \lambda_2 \frac{1}{r\sin\vartheta}\boldsymbol{e}_\varphi, \tag{s.2}$$

da alle anderen Ableitungen verschwinden.

Um nun die Lagrangegleichungen aufzustellen müssen wir nur noch den Einheitsvektor in z-Richtung durch $\boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_\vartheta, \boldsymbol{e}_r$ darstellen. Das können wir entweder tun, indem wir die Rotationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \tag{s.3}$$

von rechts auf den Vektor $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_\vartheta)$ anwenden :

$$(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z) = (\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\vartheta, \boldsymbol{e}_\varphi)S^T, \tag{s.4}$$

oder indem wir es uns geometrisch überlegen. Wir erinnern uns, dass die Einheitsvektoren in ϑ und φ Richtung tangential zur Kugeloberflaeche liegen: $\boldsymbol{e}_\varphi$ zeigt nach Osten, $\boldsymbol{e}_\vartheta$ nach Süden. Der Vektor $\boldsymbol{e}_z$ kann also nur eine r und eine ϑ Komponente haben. Es ergibt sich

$$\boldsymbol{e}_z = \cos\vartheta\boldsymbol{e}_r - \sin\vartheta\boldsymbol{e}_\vartheta. \tag{s.5}$$

Insgesamt finden wir dann in den drei Komponenten

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2(\vartheta)\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r &= -mg\cos\vartheta\boldsymbol{e}_r \\ m(2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} - r\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_\vartheta &= \left(mg\sin\vartheta + \frac{\lambda_1}{r}\right)\boldsymbol{e}_\vartheta \\ m((r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin(\vartheta) + 2r\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos(\vartheta))\boldsymbol{e}_\varphi &= \left(\frac{\lambda_2}{r\sin\vartheta}\right)\boldsymbol{e}_\varphi \end{aligned}$$

Zusätzlich müssen die Zwangsbedingungen $S_1 = S_2 = 0$ erfüllt sein.

(c) Bestimmen Sie explizit die wirkenden Zwangskräfte in Abhängigkeit von $\theta, \omega, r, \dot{r}$.

Hinweis: Setzen Sie die Zwangsbedingungen in die anderen Gleichungen ein und bestimmen Sie λ_j.

Lösung: Die Zwangsbedingungen $\vartheta = \theta$ und $\varphi = \omega t$ können wir direkt in die Bewegungsgleichungen einsetzen.

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\sin^2(\theta)\omega^2)\boldsymbol{e}_r &= -mg\cos\theta\boldsymbol{e}_r \\ m(-r\sin(\theta)\cos(\theta)\omega^2)\boldsymbol{e}_\vartheta &= \left(mg\sin\theta + \frac{\lambda_1}{r}\right)\boldsymbol{e}_\vartheta \\ 2m\dot{r}\omega\sin(\theta)\boldsymbol{e}_\varphi &= \left(\frac{\lambda_2}{r\sin\theta}\right)\boldsymbol{e}_\varphi, \end{aligned}$$

und die Zwangskräfte bestimmen, indem wir nach λ_1, λ_2 auflösen:

$$\lambda_1 = -mr^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta - rmg\sin\theta \tag{s.6}$$
$$\lambda_2 = 2mr\dot{r}\omega\sin^2\theta \tag{s.7}$$

sodass

$$\boldsymbol{Z}_1(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = -m(r\omega^2\sin\theta\cos\theta + g\sin\theta)\boldsymbol{e}_\vartheta \tag{s.8}$$
$$\boldsymbol{Z}_2(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = 2m\dot{r}\omega\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi \tag{s.9}$$

Nach Einbeziehung der Zwangsbedingungen und Zwangskräfte gilt für die $\boldsymbol{e}_r$-Komponente folgende Bewegungsgleichung:

$$m(\ddot{r} - r\sin^2(\theta)\omega^2) = -mg\cos\theta$$

(d) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangswerte $r(t=0) = r_0, \dot{r}(t=0) = 0$.

Hinweis: Nutzen Sie hierbei, dass Sie in einem früheren Aufgabenblatt schon eine spezielle Lösung gefunden haben:

$$\ddot{r} = 0 \quad \text{für} \quad r = \frac{g\cos(\theta)}{\omega^2\sin^2(\theta)}$$

Lösung: Wir wollen nun die folgende Gleichung lösen

$$\ddot{r} - r\omega^2\sin^2(\theta) = -g\cos(\theta). \tag{s.10}$$

Die homogene Gleichung lautet

$$\ddot{r} = r\omega^2\sin^2(\theta),$$

welche wir einfach durch einen exponentiellen Ansatz $r_{\mathsf{hom}}(t) = A\mathrm{e}^{\alpha t} + B\mathrm{e}^{-\alpha t}$ mit Konstanten A, B und $\alpha = \omega\sin(\theta)$ lösen können.

Eine spezielle Lösung der Differentialgleichung ist genau gegeben durch $r_{\mathsf{sp}}(t) = g\cos(\theta)/(\omega^2\sin^2\theta)$

Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$r(t) = r_{\mathsf{hom}}(t) + r_{\mathsf{sp}}(t) \tag{s.11}$$
$$= A\mathrm{e}^{\alpha t} + B\mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{g\cos(\theta)}{\omega^2\sin^2\theta}. \tag{s.12}$$

Mit den Anfangsbedingungen $\dot{r}(0) = 0, r(0) = r_0$ finden wir dann

$$A = B = \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{g\cos(\theta)}{\omega^2\sin^2\theta}\right), \tag{s.13}$$

und damit

$$r(t) = \left(r_0 - \frac{g\cos(\theta)}{\omega^2\sin^2\theta}\right)\cosh(\omega\sin(\theta)t) + \frac{g\cos(\theta)}{\omega^2\sin^2\theta} \tag{s.14}$$