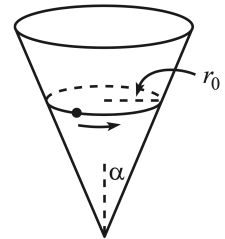


Übungsblatt 7
Lagrangemechanik 2. Art

Abgabe bis: 10.06.2022 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Masse in einem Kegel

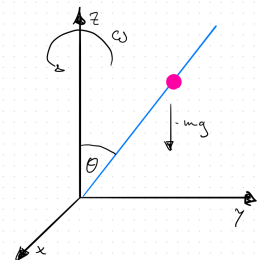
In dieser Aufgabe betrachten wir ein Teilchen mit Masse m im Inneren eines (reibunglosen) Kegels im Gravitationsfeld (mit Beschleunigung g). Die Spitze des Kegels zeigt nach unten, in die Richtung der Gravitationskraft, und sein halber Innenwinkel ist α (siehe Skizze).



- Finden Sie generalisierte Koordinaten für das System.
- Stellen Sie die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen auf.
Hinweis: Eine der Euler-Lagrange Gleichungen definiert eine Erhaltungsgröße. Setzen Sie diese in die andere(n) ein um die folgenden Rechnungen zu vereinfachen.
- Die Masse soll sich nun auf einer Kreisbahn mit Radius r_0 bewegen. Mit welcher Frequenz bewegt sie sich dann um die z -Achse?
- Betrachte eine kleine Störung der obigen Kreisbahn. Was ist die Frequenz der Schwingung um den Radius r_0 ?
Hinweis: Entwickle die Bewegungsgleichungen um den (stabilen) Fixpunkt r_0 bis zur ersten Ordnung.

Aufgabe 2: Perle auf Stab

Noch einmal wollen wir die Perle, mit Masse m auf dem Draht lösen. Zur Erinnerung: Der Draht dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und konstantem Neigungswinkel θ um die z -Achse. Die Perle ist außerdem der Gravitationskraft $\mathbf{F} = -mge_z$ ausgesetzt, die entlang der Rotationsachse wirkt.

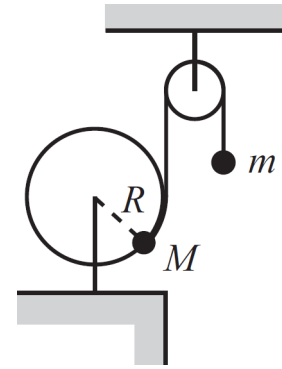


Dieses mal wollen wir die Lagrangegleichungen der zweiten Art verwenden, sodass wir uns gar nicht erst um die Zwangskräfte kümmern müssen.

- Bestimmen Sie die Freiheitsgrade des Problems und wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten.
- Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.
- Leiten Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichung her.

Aufgabe 3: Reifen und Rolle

Eine Punktmasse M ist an einem masselosen Reifen mit Radius R angebracht. Der Reifen kann frei um sein fixiertes Zentrum rotieren. An M ist ein masseloses Seil befestigt, das zunächst entlang des Reifens verläuft und dann senkrecht nach oben über eine masselose Rolle führt. Reifen und Rolle liegen in derselben Ebene. Am anderen Ende des Seils hängt eine Punktmasse m .

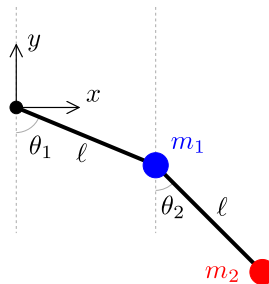


Nehmen Sie an, dass m sich nur in Richtung der Gravitationskraft bewegen kann, dass $M > m$ und, dass das Seil lang genug ist, damit m niemals über die Rolle gezogen wird.

- Stellen Sie die Lagrange-Funktion für dieses System auf.
- Warum muss man die Länge des Seils nicht kennen, um Aufgabe b) zu lösen?
- Stellen Sie die Lagrange-Gleichung 2. Art für dieses System auf. (Die Bewegungsgleichung muss nicht gelöst werden.)

Aufgabe 4: Doppel-Pendel

Betrachten Sie ein Pendel mit Masse m am Ende einer masselosen Stange mit Länge ℓ und ein zweites identisches Pendel, welches am Ende des Ersten angebracht ist. Das erste Pendel ist am Ursprung $(0, 0)$ aufgehängt und beide Pendel bewegen sich nur in einer zweidimensionalen Ebene.



- Finden Sie die generalisierte Koordinaten für das System.
- Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.
- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.