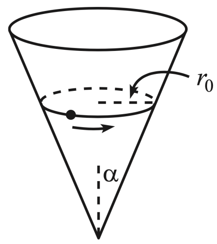
Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2022

Übungsblatt 7
Lagrangemechanik 2. Art

Abgabe bis: 10.06.2022 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Masse in einem Kegel

In dieser Aufgabe betrachten wir ein Teilchen mit Masse m im Inneren eines (reibungslosen) Kegels im Gravitationsfeld (mit Beschleunigung g). Die Spitze des Kegels zeigt nach unten, in die Richtung der Gravitationskraft, und sein halber Innenwinkel ist α (siehe Skizze).



(a) Finden Sie generalisierte Koordinaten für das System.

Lösung: Bei fester Höhe z ist die Bahn des Teilchens auf einen Kreis des Radius $r = z\tan(\alpha)$ beschränkt. Der Abstand zum Ursprung ist über $r/\sin(\alpha)$ gegeben. Deshalb wählen wir als generalisierte Koordinaten den Radius r (der Auskunft über die z Koordinate des Teilchens gibt) und den Winkel innerhalb der $x-y$ Ebene φ (der die Position auf dem Kreis mit Radius r angibt).

(b) Stellen Sie die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen auf.

Hinweis: Eine der Euler-Lagrange Gleichungen definiert eine Erhaltungsgröße. Setzen Sie diese in die andere(n) ein um die folgenden Rechnungen zu vereinfachen.

Lösung: Das Teilchen befindet sich im Gravitaionspotential $V = mgz(r) = mgr/\tan(\alpha)$. Das Betragsquadrat der Geschwindigkeit des Teilchens kann über $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$ und $z = r/\tan(\alpha)$ in den generalisierten Koordinaten ausgedrückt werden

$$|\dot{\boldsymbol{r}}(r,\varphi)|^2 = \dot{x}(r,\varphi)^2 + \dot{y}(r,\varphi)^2 + \dot{z}(r,\varphi)^2 = \frac{\dot{r}^2}{\sin^2(\alpha)} + r^2\dot{\varphi}^2, \tag{s.1}$$

wobei wir $1 + 1/\tan^2(\alpha) = 1/\sin^2(\alpha)$ verwendet haben.

Damit ergibt sich die Lagrangefunktion zu

$$L(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{r}^2}{\sin^2(\alpha)} + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{mgr}{\tan(\alpha)} \tag{s.2}$$

und die Bewegungsgleichungen mit der Euler-Lagrange Gleichung zu

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0 \tag{s.3}$$

$$\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2\sin^2(\alpha) - g\cos(\alpha)\sin(\alpha) \tag{s.4}$$

Die erste Gleichung sagt uns, dass der Drehimpuls erhalten ist. Setzen wir die Konstante $mr^2\dot{\varphi} = L$ können wir die zweite Bewegungsgleichung unabhängig von φ schreiben

$$\ddot{r} = \frac{L^2\sin^2(\alpha)}{m^2r^3} - g\cos(\alpha)\sin(\alpha). \tag{s.5}$$

(c) Die Masse soll sich nun auf einer Kreisbahn mit Radius r_0 bewegen. Mit welcher Frequenz bewegt sie sich dann um die z-Achse?

Lösung: Auf einer festen Kreisbahn gilt $r = r_0 = const$ sodass wir $\ddot{r} = 0$ setzen können. Dadurch ergibt sich

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{g}{r_0 \tan(\alpha)}} =: \omega, \tag{s.6}$$

welches genau die Winkelgeschwindigkeit, also die Frequenz um die z-Achse ist.

(d) Betrachte eine kleine Störung der obigen Kreisbahn. Was ist die Frequenz der Schwingung um den Radius r_0?

Hinweis: Entwickle die Bewegungsgleichungen um den (stabilen) Fixpunkt r_0 bis zur ersten Ordnung.

Lösung: Sei $r = r_0 + \delta r$ und δr klein. Wir nutzen die Bewegungsgleichung, in der die Drehimpulserhaltung bereits eingesetzt wurde. Wir nähern $1/(r_0 + \delta r)^3$ über

$$\frac{1}{(r_0 + \delta r)^3} = \frac{1}{r_0^3 + 3r_0^2 \delta r + O(\delta r^2)} \approx \frac{1}{r_0^3}\left(1 - \frac{3\delta r}{r_0}\right) \tag{s.7}$$

und erhalten die genäherte Bewegungsgleichung um Radius r_0 (mit Winkelfrequenz $\dot{\varphi} = \omega$)

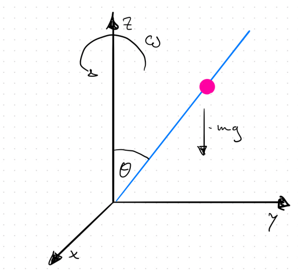
$$\ddot{\delta r} = -\left(\frac{3L^2 \sin^2(\alpha)}{m^2 r_0^4}\right)\delta r. \tag{s.8}$$

Hier können wir bereits die Frequenz der Oszillation um r_0 ablesen und mithilfe der Definition von L und ω vereinfachen,

$$\Omega = \sqrt{\frac{3L^2 \sin^2(\alpha)}{m^2 r_0^4}} = \sqrt{\frac{3g}{r_0}\sin(\alpha)\cos(\alpha)}. \tag{s.9}$$

Aufgabe 2: Perle auf Stab

Noch einmal wollen wir die Perle, mit Masse m auf dem Draht lösen. Zur Erinnerung: Der Draht dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und konstantem Neigungswinkel θ um die z-Achse. Die Perle ist außerdem der Gravitationskraft $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$ ausgesetzt, die entlang der Rotationsachse wirkt.



Dieses mal wollen wir die Lagrangegleichungen der zweiten Art verwenden, sodass wir uns gar nicht erst um die Zwangskräfte kümmern müssen.

(a) Bestimmen Sie die Freiheitsgrade des Problems und wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten.

Lösung: $f = 1$ and the distance r between the pearl and the origin is the generalized coordinate.

(b) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

Lösung: The Lagrangian is $L = T - V$, with

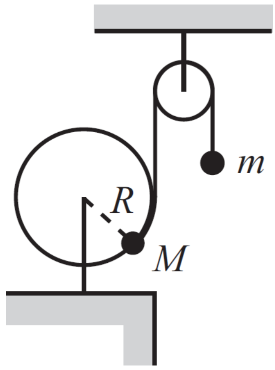
$$T = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2 \sin^2(\theta)\omega^2\right] ,$$
$$V = mgr\cos(\theta) .$$

(c) Leiten Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichung her.

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\omega^2 \sin^2(\theta) + mg\cos(\theta) = 0$$

Aufgabe 3: Reifen und Rolle



Eine Punktmasse M ist an einem masselosen Reifen mit Radius R angebracht. Der Reifen kann frei um sein fixiertes Zentrum rotieren. An M ist ein masseloses Seil befestigt, das zunächst entlang des Reifens verläuft und dann senkrecht nach oben über eine masselose Rolle führt. Reifen und Rolle liegen in derselben Ebene. Am anderen Ende des Seils hängt eine Punktemasse m.

Nehmen Sie an, dass m sich nur in Richtung der Gravitationskraft bewegen kann, dass $M > m$ und, dass das Seil lang genug ist, damit m niemals über die Rolle gezogen wird.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion für dieses System auf.

Lösung: Expressing the Lagrangian in terms of θ and z we have

$$L = \frac{1}{2}M(R\dot{\theta})^2 - MgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz \tag{s.10}$$

Using the constraint $R\theta + z = \text{const.}$ we can eliminate z from the Lagrangian obtaining

$$L = \frac{1}{2}(M+m)R^2\dot{\theta}^2 + MgR\cos\theta + mgR\theta + \text{const.} \tag{s.11}$$

(b) Warum muss man die Länge des Seils nicht kennen, um Aufgabe b) zu lösen?

Lösung: The rope length, which appears in the constraint relation, contributes merely an additive constant in the Lagrangian, which is completely irrelevant as it does not modify the Euler-Lagrange equations. For this reason additive constants can be dropped from the Lagrangian.

Note that for the same reason we are free to measure the potential energy of the two masses starting from different reference levels (here the bottom position $\theta = 0$ for M and the position $z = 0$ for m). A different choice of reference level would result in a shift of the Lagrangian by an irrelevant additive constant.

Changing the Lagrangian in a way that leaves the Euler-Lagrange equations unchanged corresponds to a 'gauge transformation' ('Eichtransformation').

(c) Stellen Sie die Lagrange-Gleichung 2. Art für dieses System auf. (Die Bewegungsgleichung muss nicht gelöst werden.)

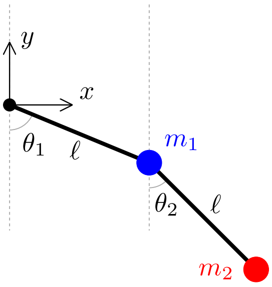
Lösung: The Euler-Lagrange equation corresponding to the Lagrangian (s.11) is

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \tag{s.12}$$

$$(M+m)R\ddot{\theta} = g(m - M\sin\theta) \tag{s.13}$$

Aufgabe 4: Doppel-Pendel

Betrachten Sie ein Pendel mit Masse m am Ende einer masselosen Stange mit Länge ℓ und ein zweites identisches Pendel, welches am Ende des Ersten angebracht ist. Das erste Pendel ist am Ursprung $(0,0)$ aufgehängt und beide Pendel bewegen sich nur in einer zweidimensionalen Ebene.



(a) Finden Sie die generalisierte Koordinaten für das System.

(b) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

Lösung: Die Lösungen befinden sich auf den folgenden Seiten.

4a The positions of the masses only depend on θ_1 and θ_2.

b To write down the Lagrangian ($\mathcal{L} = T - V$) we need an expression for the kinetic energy and potential energy. First lets look at the kinetic energy.

For m_1: $T_{m_1} = \frac{1}{2} m_1 l \dot{\theta}_1^2$

M_2 is a bit more tricky. Because we chose as generalised coordinates θ_1 and θ_2 we need to write $\vec{v}_2$ in terms of $\dot{\theta}_1$ and $\dot{\theta}_2$. We use Cartesian coordinates to find:

$$x_2 = l \sin\theta_1 + l \sin\theta_2 \longrightarrow \dot{x}_2 = l\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l\dot{\theta}_2 \cos\theta_2$$
$$y_2 = -l\cos\theta_1 - l\cos\theta_2 \qquad \dot{y}_2 = l\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l\dot{\theta}_2 \sin\theta_2$$

Thus, $v_{m_2}^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$
$= l^2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right)$

The total kinetic energy of the system is:
$$T = \frac{1}{2} m l^2 \left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right)$$

The potential energy is:
$$V = mgy_1 + mgy_2 = -mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

c) Use the Euler-Lagrange equations
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \quad \text{and} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_2}$$
to find:

$$0 = (m_1 + m_2) l^2 \ddot{\theta}_1^2 + m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l^2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$
$$+ (m_1 + m_2) g l \sin\theta_1 ,$$

and

$$0 = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$
$$+ m_2 g l_2 \sin\theta_2$$