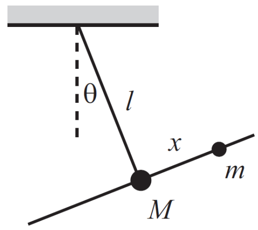
Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2022

Übungsblatt 8
Mehr zu Lagrange und Eichtransformationen

Abgabe bis: 17.06.2022 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Kippende Ebene

Eine masselose Stange mit Länge l ist an einem Ende an einer Aufhängung befestigt. Am anderen Ende ist eine zweite sehr lange masselose Stange befestigt, die im rechten Winkel zur ersten Stange montiert ist. Eine Masse M ist am Verbindungspunkt der beiden Stangen fixiert. Eine zweite Masse m kann sich entlang der langen Stange frei bewegen. Das ganze System kann frei um die Achse der Aufhängung rotieren.



(a) Wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten und stellen Sie die Lagrangefunktion in diesen Koordinaten auf.

(b) Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen für dieses System.

(c) Nehmen Sie jetzt an, dass x und θ sowie $\dot{x}$ und $\dot{\theta}$ klein sind, i.e., $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta} = O(\epsilon)$ mit $\epsilon \approx 0$. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen zur 1. Ordnung in $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}$ zur folgenden linearisierten Bewegungsgleichungen führen:

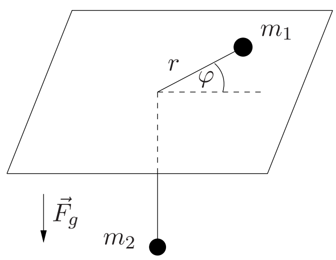
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta - \frac{m}{M}\frac{g}{l^2}x \; ; \qquad \ddot{x} = \frac{m}{M}\frac{g}{l}x \; . \tag{1}$$

(d) Finden Sie die allgemeine Lösungen der obigen linearisierten Bewegungsgleichungen, unter der Annahme, dass $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}$ sehr klein sind. In welchem Fall oszilliert das System stabil?

Hinweis. Mindestens zwei Methoden sind möglich. (1) Direkt für $x(t)$, und dann für $\theta(t)$, lösen. (2) Die Bewegungsgleichungen in Matrixform $\left(\begin{smallmatrix}\ddot{\theta}\\ \ddot{x}\end{smallmatrix}\right) = T\left(\begin{smallmatrix}\theta\\ x\end{smallmatrix}\right)$ schreiben, und die Matrix T diagonalisieren, um dann die Normalmoden finden zu können.

Aufgabe 2: Verbundene Massen mit planarer Zwangsbedingung

Zwei Massen m_1 und m_2 sind durch einen Faden der Länge L verbunden, der durch ein Loch in einer horizontalen Fläche (der $(x-y)$-Ebene) verläuft. Die Masse m_1 gleitet reibungslos auf der horizontalen Fläche, während m_2 senkrecht nach unten hängt und sich nur in Richtung der Gravitationskraft bewegt. Wir nehmen an, dass das Faden straff bleibt.



(a) Argumentieren Sie, warum (r, φ) eine gute Wahl von unabhängigen Parametern zur Aufstellung der Lagrangefunktion sind. Stellen sie die Lagrangefunktion mit diesen Parametern auf.

(b) Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange Gleichungen zur folgenden Bewegungsgleichungen führen:

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{r} - m_1 r\dot{\varphi}^2 + m_2 g = 0 \tag{2a}$$
$$m_1 r^2\ddot{\varphi} + 2m_1 r\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \tag{2b}$$

(c) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\ell_1 = m_1 r^2 \dot{\varphi}$ von m_1 gleich einer Konstanten ist, die wir im Folgenden ℓ nennen.

Hinweis. Beachten Sie, dass $\ell_1 = (\partial L/\partial\dot{\varphi})$. *Benutzen Sie dann die Euler-Lagrange Gleichungen.*

(d) Schreiben Sie $\dot{\varphi}$ in Form von ℓ und ersetzen Sie dann diesen Ausdruck in der Bewegungsgleichung für r. Diskutieren Sie das Verhalten von r für verschiedene Werte des Drehimpulses. Zeigen Sie, dass es für einen festen Drehimpuls ℓ einen kritischen Radius r^* gibt, in dem $\ddot{r}$ verschwindet.

(e) Zeigen Sie, dass eine Trajektorie für die der Radius $r(t) = r^* = \text{const.}$ ist, die Bewegungsgleichung erfüllt. Erklären Sie, welche Kräfte ausgeglichen werden müssen, um zu dieser Gleichgewichtssituation zu führen.

(f) Nun bewegt sich die Masse auf dieser Gleichgewichtsbahn mit konstantem Radius r^* und wird durch eine kleine Störung $\epsilon(t)$ in radialer Richtung abgelenkt. Wir schreiben $r(t) = r^* + \epsilon(t)$. Leiten Sie die Bewegungsgleichung für r in Bezug auf $\epsilon(t)$ neu her. Vernachlässigen Sie alle Terme zweiter oder höherer Ordnung in ϵ und zeigen Sie, dass die resultierende Trajektorie stabil ist und dass $r(t)$ sinusförmig um r^* oszilliert. Was ist die Frequenz dieser Oszillation?

Aufgabe 3: Eichtransformationen der Lagrangefunktion

In dieser Übung untersuchen wir Transformationen der Lagrangefunktion, welche die entsprechende physikalische Bewegung nicht beeinflussen. Solche Transformationen nennen wir Eichtransformationen.

(a) Betrachten Sie ein 1-Dimensionales Teilchen der Masse m mit Ortskoordinate x. Die Bewegung des Teilchens sei mit der folgenden Lagrangefunktion beschrieben,

$$L_1(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - t\dot{x}F(x) \ , \tag{3}$$

wobei $F(x)$ ein Feld mit Einheiten einer Kraft ist. Zeigen Sie, dass die entsprechende Bewegungsgleichung tatsächlich dieselbe ist, wie die für ein Teilchen, das sich in einem Kraftfeld $F(x)$ befindet.

(b) Eine allgemeine Lagrangefunktion $L(q_i,\, \dot{q}_i,\, t)$ eines Systems hänge von den verallgemeinerten Koordinaten q_i, den entsprechenden Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$, $i = 1, \ldots, N$, und der Zeit ab. Zeigen Sie durch Aufstellen der Euler-Lagrange-Gleichungen, dass die Lagrangefunktion

$$L'(q_i,\, \dot{q}_i,\, t) = L(q_i,\, \dot{q}_i,\, t) + \frac{d}{dt} f(q_i, t) \tag{4}$$

zu den gleichen Bewegungsgleichungen wie $L(q_i,\, \dot{q}_i,\, t)$ führt. (Man benütze hier die Schreibweise $(d/dt)f(q_i, t) = (\partial f/\partial t) + \sum_i (\partial f/\partial q_i)\, \dot{q}_i$.)

(c) Betrachten Sie wie in a) ein 1-dimensionales Teilchen der Masse m mit Ortskoordinate x. Das Feld $F(x) = -(\partial V/\partial x)$ sei ein konservatives Kraftfeld mit Potenzial $V(x)$. Geben Sie die entsprechende Lagrangefunktion in der Form $L_2(x, \dot{x}, t) = T(\dot{x}) - V(x)$ an. Zeigen Sie, dass L_1 [in Aufgabe a) definiert] und L_2 sich durch ein Term der Form $(d/dt)f(x, t)$ unterscheiden, wie in (4). (Die Lagrangefunktionen L_1 und L_2 sind dann äquivalent bis auf eine Eichtransformation.)

Hinweis. Es gilt $dV/dt = \dot{x}(\partial V/\partial x)$, *denn* V *nur implizit durch* $x(t)$ *von der Zeit abhängt.*