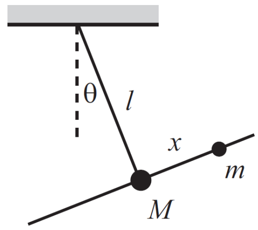
Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2022

Übungsblatt 8
Mehr zu Lagrange und Eichtransformationen

Abgabe bis: 17.06.2022 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Kippende Ebene

Eine masselose Stange mit Länge l ist an einem Ende an einer Aufhängung befestigt. Am anderen Ende ist eine zweite sehr lange masselose Stange befestigt, die im rechten Winkel zur ersten Stange montiert ist. Eine Masse M ist am Verbindungspunkt der beiden Stangen fixiert. Eine zweite Masse m kann sich entlang der langen Stange frei bewegen. Das ganze System kann frei um die Achse der Aufhängung rotieren.



(a) Wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten und stellen Sie die Lagrangefunktion in diesen Koordinaten auf.

Lösung: Wir wählen folgende Koordinaten: θ, der Rotationswinkel des Systems um die Aufhängung, und x die Position von m entlang der langen Stange relativ zu M.

Die Positionen der Massen sind durch diese Koordinaten folgendermaßen beschrieben (Aufhängung bei $(0, 0)$):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_M &= (l\sin\theta, -l\cos\theta) \\ \boldsymbol{r}_m &= (l\sin\theta + x\cos\theta, -l\cos\theta + x\sin\theta) \end{aligned} \tag{s.1}$$

Wir berechnen die Geschwindigkeiten für die Massenpunkte:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}_M &= \left(l\dot\theta\cos\theta, l\dot\theta\sin\theta\right) \\ \dot{\boldsymbol{r}}_M^2 &= l^2\dot\theta^2 \\ \dot{\boldsymbol{r}}_m &= \left((l\dot\theta + \dot x)\cos\theta - x\dot\theta\sin\theta, (l\dot\theta + \dot x)\sin\theta + x\dot\theta\cos\theta\right) \\ \dot{\boldsymbol{r}}_m^2 &= (l\dot\theta + \dot x)^2 + x^2\dot\theta^2 \end{aligned} \tag{s.2}$$

Die kinetische Energie des Systems ist gegeben durch

$$T = \frac{M}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_M^2 + \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_m^2 \tag{s.3}$$

und das Potential durch:

$$U = -Mgl\cos\theta + mg(-l\cos\theta + x\sin\theta) \tag{s.4}$$

Die Lagrangefunktion ergibt sich zu:

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2}l^2\dot\theta^2 + \frac{m}{2}\left((l\dot\theta + \dot x)^2 + x^2\dot\theta^2\right) + (M+m)gl\cos\theta - mgx\sin\theta \tag{s.5}$$

(b) Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen für dieses System.

Lösung: Wir berechnen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ml\dot{\theta} + m\dot{x}\right) = ml\ddot{\theta} + m\ddot{x} \ ; \tag{s.6a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = mx\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta \ ; \tag{s.6b}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Ml^2\dot{\theta} + ml(l\dot{\theta} + \dot{x}) + mx^2\dot{\theta}\right) \\ &= Ml^2\ddot{\theta} + ml(l\ddot{\theta} + \ddot{x}) + mx^2\ddot{\theta} + 2mx\dot{x}\dot{\theta} \ ;\end{aligned} \tag{s.6c}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -(M+m)gl\sin\theta - mgx\cos\theta \ . \tag{s.6d}$$

Die Lagrange-Gleichungen zweiter Art sind also gegeben durch:

$$\begin{gathered} l\ddot{\theta} + \ddot{x} = x\dot{\theta}^2 - g\sin\theta \ ; \\ Ml^2\ddot{\theta} + ml(l\ddot{\theta} + \ddot{x}) + mx^2\ddot{\theta} + 2mx\dot{x}\dot{\theta} = -(M+m)gl\sin\theta - mgx\cos\theta \ . \end{gathered} \tag{s.7}$$

(c) Nehmen Sie jetzt an, dass x und θ sowie $\dot{x}$ und $\dot{\theta}$ klein sind, i.e., $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta} = O(\epsilon)$ mit $\epsilon \approx 0$. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen zur 1. Ordnung in $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}$ zur folgenden linearisierten Bewegungsgleichungen führen:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta - \frac{m}{M}\frac{g}{l^2}x \ ; \qquad\qquad \ddot{x} = \frac{m}{M}\frac{g}{l}\,x \ . \tag{1}$$

Lösung: Start from the equations of motion (s.7). Recall the expansions $\sin\theta = \theta + O(\epsilon^2)$ and $\cos\theta = 1 + O(\epsilon^2)$. Terms that involve products of the variables $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}$ variables are of order $O(\epsilon^2)$, e.g., $2mx\dot{x}\dot{\theta} = O(\epsilon^3)$. Therefore, keeping only terms of order $O(\epsilon)$ in (s.7) gives us a pair of linearized equations of motion,

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x} = -g\theta \ ; \tag{s.8a}$$

$$(M+m)\,l^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = -(M+m)\,gl\theta - mgx \ . \tag{s.8b}$$

Computing the linear combinations $(\text{s.8b}) - ml(\text{s.8a})$ and $(\text{s.8b}) - (M+m)\,l(\text{s.8a})$ of the above equations gives us

$$Ml^2\ddot{\theta} = -Mgl\theta - mgx \ ; \qquad\qquad -Ml\ddot{x} = -mgx \ . \tag{s.9}$$

These are the equations (1) we were looking for.

(d) Finden Sie die allgemeine Lösungen der obigen linearisierten Bewegungsgleichungen, unter der Annahme, dass $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}$ sehr klein sind. In welchem Fall oszilliert das System stabil?

Hinweis. Mindestens zwei Methoden sind möglich. (1) Direkt für $x(t)$, und dann für $\theta(t)$, lösen. (2) Die Bewegungsgleichungen in Matrixform $\left(\begin{smallmatrix}\ddot{\theta}\\ \ddot{x}\end{smallmatrix}\right) = T\left(\begin{smallmatrix}\theta\\ x\end{smallmatrix}\right)$ schreiben, und die Matrix T diagonalisieren, um dann die Normalmoden finden zu können.

Lösung: Method 1: The solutions of the linearized equations of motion (1) can be found by sequentially solving for $x(t)$ and then for $\theta(t)$. The equation for $\ddot{x}$ does not involve θ, so we immediately find that the general solution is

$$x(t) = A\cosh\left(\alpha t + \beta\right) \ , \tag{s.10}$$

where $\alpha = \sqrt{mg/Ml}$ and where $A \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ are determined by the initial conditions (second order homogeneous equation, non-oscillatory case). Plugging this general solution for $x(t)$ into the linearized equation for θ we obtain the following inhomogeneous second order equation for θ:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta - A\frac{mg}{Ml^2}\cosh\big(\alpha t + \beta\big) \; . \tag{s.11}$$

The general solution of the homogeneous part $\ddot{\theta} = -(g/l)\,\theta$ of (s.11) is given by $\theta_{\text{hom.}}(t) = B\cos(\omega t + \phi)$ with $B, \phi \in \mathbb{R}$ determined by initial conditions (it's a usual harmonic oscillator equation) and with $\omega = \sqrt{g/l}$. A special solution of (s.11) can be guessed by picking $\theta(t)$ with an Ansatz similar to the inhomogeneous part of the equation, $\theta_{\text{special}}(t) = \gamma\cosh\big(\alpha t + \beta\big)$, with γ to be determined. We see that $\ddot{\theta}_{\text{special}}(t) = \gamma\alpha^2\cosh\big(\alpha t + \beta\big)$, and plugging into the differential equation (s.11), we find

$$\gamma\alpha^2\cosh\big(\alpha t + \beta\big) = -\frac{g}{l}\,\gamma\,\cosh\big(\alpha t + \beta\big) - A\frac{mg}{Ml^2}\,\cosh\big(\alpha t + \beta\big) \; , \tag{s.12}$$

which means that γ must satisfy

$$\gamma\Big(\alpha^2 + \frac{g}{l}\Big) = -A\frac{mg}{Ml^2} \; . \tag{s.13}$$

Using $\alpha^2 = mg/Ml$, we find that $\gamma\big(m + M\big) = -Am/l$, and therefore

$$\gamma = -\frac{Am}{l\,(m + M)} \; . \tag{s.14}$$

The special solution to the differential equation for θ is then

$$\theta_{\text{special}}(t) = -A\frac{m}{l\,(M + m)}\,\cosh\big(\alpha t + \beta\big) \; . \tag{s.15}$$

This then leads to the general solution for $\theta(t)$:

$$\theta(t) = B\cos(\omega t + \phi) - A\frac{m}{l\,(m + M)}\cosh\big(\alpha t + \beta\big) \; . \tag{s.16}$$

Here, $\omega = \sqrt{g/l}$, $\alpha = \sqrt{mg/Ml}$, and $A, B, \beta, \phi \in \mathbb{R}$ are determined from the initial conditions.

We can write the solutions for (θ, x) in vector form to identify more clearly the normal modes:

$$\begin{pmatrix}\theta(t)\\ x(t)\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\cos\big(\omega t + \phi\big) + A'\begin{pmatrix}m\\ -l(m + M)\end{pmatrix}\cosh\big(\alpha t + \beta\big) \; , \tag{s.17}$$

where $A', B, \phi, \beta \in \mathbb{R}$ are determined from the initial conditions.

The first term is a stable oscillatory mode in which $x(t) = 0$ for all t. This corresponds to the situation where the mass m remains always superimposed with the mass M, and both swing like two parallel pendulums. This mode is stable and oscillates with frequency $\omega = \sqrt{g/l}$.

The second term in (s.17) drives exponential growth of x, θ (owing to the cosh), and therefore describes an unstable perturbation. Note that the range of validity of this solution is small, because the approximation that x, θ are small becomes incorrect after a small time.

Method 2: Alternatively, the normal modes can also be found by writing the linearized equations of motion (1) in matrix form, and diagonalizing the relevant matrix. We first rearrange (1) to obtain

$$\begin{pmatrix}\ddot{\theta}\\ \ddot{x}\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}\theta\\ x\end{pmatrix} \; ; \qquad\qquad T = \frac{g}{Ml^2}\begin{pmatrix}-Ml & -m\\ 0 & ml\end{pmatrix} =: \frac{g}{Ml^2}T' \; . \tag{s.18}$$

The eigenvalues $\lambda'_\pm$ of T' are given by the roots of the characteristic polynomial of T'; namely, they are obtained by setting $0 = (-Ml - \lambda')(ml - \lambda')$. The $\lambda'_\pm$ can be read out as

$$\lambda'_+ = ml \; ; \qquad\qquad \lambda'_- = -Ml \; . \tag{s.19}$$

To find the eigenvectors of T' associated with these eigenvalues we write for unknown a, b

$$\begin{pmatrix} -Ml & -m \\ 0 & ml \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \lambda'_\pm \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \; . \tag{s.20}$$

The equation for the first component yields

$$(-Ml - \lambda'_\pm)\, a - mb = 0 \; . \tag{s.21}$$

For $\lambda'_- = -Ml$, this equation implies that $b = 0$ and a can be arbitrary, e.g., $a = 1$. For $\lambda'_+ = ml$, we see that we can choose the eigenvector to have the components $a = m$, $b = (-Ml - ml) = -l\,(M + m)$. Observe that the eigenvectors of T coincide with those of T', and the eigenvalues of T are simply $\lambda_\pm = [g/(Ml^2)]\, \lambda'_\pm$, namely,

$$\lambda_+ = \frac{mg}{Ml} \; ; \qquad\qquad \lambda_- = -\frac{g}{l} \; . \tag{s.22}$$

Therefore, the normal modes associated with $\lambda_\pm$ are given via the vectors

$$\boldsymbol{u}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \qquad\qquad \boldsymbol{u}_+ = \begin{pmatrix} m \\ -l(m + M) \end{pmatrix} \; . \tag{s.23}$$

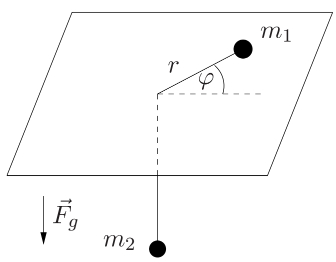
The mode associated with $\lambda_- = -g/l$ is a stable oscillation with frequency given by $\omega^2 = -\lambda_- = g/l$ (since the eigenvalue is negative); the mode associated with $\lambda_+ = mg/(Ml)$ is an exponentially diverging mode $\cosh(\alpha t + \beta)$ with $\alpha^2 = \lambda_+ = mg/(Ml)$ (as the eigenvalue is positive). The general solution for $\theta(t), x(t)$ is then

$$\begin{pmatrix} \theta(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}_-\, B\, \cos\big(\omega t + \phi\big) + \boldsymbol{u}_+\, A'\, \cosh\big(\alpha t + \beta\big) \; , \tag{s.24}$$

with $A', B, \phi, \beta \in \mathbb{R}$ to be determined from initial conditions. That's exactly what we found above in (s.17) using the other method. See above for the interpretation of the two normal modes.

Aufgabe 2: Verbundene Massen mit planarer Zwangsbedingung

Zwei Massen m_1 und m_2 sind durch einen Faden der Länge L verbunden, der durch ein Loch in einer horizontalen Fläche (der $(x-y)$-Ebene) verläuft. Die Masse m_1 gleitet reibungslos auf der horizontalen Fläche, während m_2 senkrecht nach unten hängt und sich nur in Richtung der Gravitationskraft bewegt. Wir nehmen an, dass das Faden straff bleibt.



(a) Argumentieren Sie, warum (r, φ) eine gute Wahl von unabhängigen Parametern zur Aufstellung der Lagrangefunktion sind. Stellen sie die Lagrangefunktion mit diesen Parametern auf.

Lösung: If z is the height of the mass m_2, we have that $z = r - \ell_0$, where ℓ_0 is the length of the string, and we have $\dot{z} = \dot{r}$. Then the kinetic energy is given by

$$T = \frac{1}{2} m_1 \big(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2\big) + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}^2 \; . \tag{s.25}$$

Also, we can write the potential energy term as

$$V = m_2 g z + m_2 g \ell_0 = m_2 g r \ , \tag{s.26}$$

where we shifted the potential by the constant $mg\ell_0$ for convenience, since we know that such a shift has no effect on the equations of motion. We then find:

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}^2 - m_2 g r \ . \tag{s.27}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange Gleichungen zur folgenden Bewegungsgleichungen führen:

$$(m_1 + m_2)\, \ddot{r} - m_1 r \dot{\varphi}^2 + m_2 g = 0 \tag{2a}$$
$$m_1 r^2 \ddot{\varphi} + 2 m_1 r \dot{r} \dot{\varphi} = 0 \tag{2b}$$

Lösung: We need to compute the partial derivatives

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m_1 r \dot{\varphi}^2 - m_2 g \ ; \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m_1 \dot{r} + m_2 \dot{r} \ ; \tag{s.28a}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \ ; \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_1 r^2 \dot{\varphi} \ , \tag{s.28b}$$

Then we obtain

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (m_1 + m_2)\, \ddot{r} \ ; \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2 m_1 r \dot{r} \dot{\varphi} + m_1 r^2 \ddot{\varphi} \ . \tag{s.29}$$

The sought equations of motion (2) are finally obtained by plugging in the above expressions in the Euler-Lagrange equations:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \ ; \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \ . \tag{s.30}$$

(c) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\ell_1 = m_1 r^2 \dot{\varphi}$ von m_1 gleich einer Konstanten ist, die wir im Folgenden ℓ nennen.

Hinweis. Beachten Sie, dass $\ell_1 = (\partial L / \partial \dot{\varphi})$. Benutzen Sie dann die Euler-Lagrange Gleichungen.

Lösung: We can compute

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_1 r^2 \dot{\varphi} = \ell_1 \ . \tag{s.31}$$

Using the Euler-Lagrange equation for φ, we then find

$$\frac{d}{dt}\ell_1 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \ , \tag{s.32}$$

noting that L does not depend on φ.

This is in fact a special case of Noether's theorem: A symmetry in the Lagrangian (in this case, L is invariant under shifts in φ) leads to an associated conserved quantity (in this case, the angular momentum).

(d) Schreiben Sie $\dot{\varphi}$ in Form von ℓ und ersetzen Sie dann diesen Ausdruck in der Bewegungsgleichung für r. Diskutieren Sie das Verhalten von r für verschiedene Werte des Drehimpulses. Zeigen Sie, dass es für einen festen Drehimpuls ℓ einen kritischen Radius r^* gibt, in dem $\ddot{r}$ verschwindet.

Lösung: Wir stellen die Definition von ℓ_1 um, um $\dot{\varphi} = \frac{\ell}{m_1 r^2}$ zu erhalten.

Wenn wir diesen Ausdruck in Gleichung (2a) einsetzen, erhalten wir

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m_1 r^3} - m_2 g\ . \tag{s.33}$$

Halten wir ℓ auf einer Konstante fest, so gibt es einen kritischen Radius

$$r^* = \sqrt[3]{\frac{\ell^2}{m_1 m_2 g}}\ , \tag{s.34}$$

bei dem die radiale Beschleunigung verschwindet. Für $r > r^*$ ist die radiale Beschleunigung $\ddot{r}$ negativ und die Masse wird auf eine kleinere Umlaufbahn gezogen. Für $r < r^*$ ist die radiale Beschleunigung positiv und die Masse wird auf einen größeren Radius gezogen. Oder anders formuliert: Abweichungen von r^* erfahren eine Beschleunigung in die entgegengesetzten Richtung.

(e) Zeigen Sie, dass eine Trajektorie für die der Radius $r(t) = r^* = \text{const.}$ ist, die Bewegungsgleichung erfüllt. Erklären Sie, welche Kräfte ausgeglichen werden müssen, um zu dieser Gleichgewichtssituation zu führen.

Lösung: Wenn $r = r^*$, dann verschwinden alle Ableitungen und die Gleichung (2a) ist erfüllt. Das entspricht der Situtation, in der die Masse m_1 sich auf einer Kreisbahn mit konstantem Radius um das Loch herum bewegt. Diese Gleichgewichtssituation ist dann erreicht, wenn die Gravitationskraft und die Zentrifugalkraft ausbalanciert sind.

(f) Nun bewegt sich die Masse auf dieser Gleichgewichtsbahn mit konstantem Radius r^* und wird durch eine kleine Störung $\epsilon(t)$ in radialer Richtung abgelenkt. Wir schreiben $r(t) = r^* + \epsilon(t)$. Leiten Sie die Bewegungsgleichung für r in Bezug auf $\epsilon(t)$ neu her. Vernachlässigen Sie alle Terme zweiter oder höherer Ordnung in ϵ und zeigen Sie, dass die resultierende Trajektorie stabil ist und dass $r(t)$ sinusförmig um r^* oszilliert. Was ist die Frequenz dieser Oszillation?

Lösung: Schreiben wir Gleichung (s.33) um, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\ddot{\epsilon} &= \frac{\ell^2}{m_1 (r^* + \epsilon)^3} - m_2 g \\ &= \frac{\ell^2}{m_1 r^{*3}(1 + \frac{\epsilon}{r^*})^3} - m_2 g \\ &= \frac{\ell^2}{m_1 r^{*3}}\Big(1 - 3\frac{\epsilon}{r^*} + \ldots\Big) - m_2 g\end{aligned} \tag{s.35}$$

indem wir in ϵ um 0 herum entwickelt haben. Behalten wir nur die linearen Terme in ϵ und erinnern wir uns aus (s.34), dass $\frac{\ell^2}{m_1 r^{*3}} = m_2 g$, so erhalten wir

$$\ddot{\epsilon} = -\frac{3\ell^2}{m_1 r^{*4}(m_1 + m_2)}\,\epsilon. \tag{s.36}$$

Dies ist wieder einmal die Bewegungsgleichung eines einfachen harmonischen Oszillator, dessen Lösung eine Linearkombination aus Sinus- und Kosinustermin mit Frequenz $\sqrt{\frac{3l^2}{m_1 r^{*4}(m_1+m_2)}}$ ist. Damit ist das Orbit stabil unter kleinen Perturbationen, da die Trajektorie lediglich um den ursprünglichen Wert von r^* oszillieren würde.

Aufgabe 3: Eichtransformationen der Lagrangefunktion

In dieser Übung untersuchen wir Transformationen der Lagrangefunktion, welche die entsprechende physikalische Bewegung nicht beeinflussen. Solche Transformationen nennen wir Eichtransformationen.

(a) Betrachten Sie ein 1-Dimensionales Teilchen der Masse m mit Ortskoordinate x. Die Bewegung des Teilchens sei mit der folgenden Lagrangefunktion beschrieben,

$$L_1(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - t\dot{x}F(x) \ , \tag{3}$$

wobei $F(x)$ ein Feld mit Einheiten einer Kraft ist. Zeigen Sie, dass die entsprechende Bewegungsgleichung tatsächlich dieselbe ist, wie die für ein Teilchen, das sich in einem Kraftfeld $F(x)$ befindet.

(b) Eine allgemeine Lagrangefunktion $L(q_i,\, \dot{q}_i,\, t)$ eines Systems hänge von den verallgemeinerten Koordinaten q_i, den entsprechenden Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$, $i = 1, \ldots, N$, und der Zeit ab. Zeigen Sie durch Aufstellen der Euler-Lagrange-Gleichungen, dass die Lagrangefunktion

$$L'(q_i,\, \dot{q}_i,\, t) = L(q_i,\, \dot{q}_i,\, t) + \frac{d}{dt}f(q_i, t) \tag{4}$$

zu den gleichen Bewegungsgleichungen wie $L(q_i,\, \dot{q}_i,\, t)$ führt. (Man benütze hier die Schreibweise $(d/dt)f(q_i, t) = (\partial f/\partial t) + \sum_i (\partial f/\partial q_i)\, \dot{q}_i$.)

(c) Betrachten Sie wie in a) ein 1-dimensionales Teilchen der Masse m mit Ortskoordinate x. Das Feld $F(x) = -(\partial V/\partial x)$ sei ein konservatives Kraftfeld mit Potenzial $V(x)$. Geben Sie die entsprechende Lagrangefunktion in der Form $L_2(x, \dot{x}, t) = T(\dot{x}) - V(x)$ an. Zeigen Sie, dass L_1 [in Aufgabe a) definiert] und L_2 sich durch ein Term der Form $(d/dt)f(x, t)$ unterscheiden, wie in (4). (Die Lagrangefunktionen L_1 und L_2 sind dann äquivalent bis auf eine Eichtransformation.)

Hinweis. Es gilt $dV/dt = \dot{x}(\partial V/\partial x)$, denn V nur implizit durch $x(t)$ von der Zeit abhängt.

Lösung: Für die Lösung zu a) und c), siehe die folgenden Seiten. Hier steht die Lösung zu b):

Wir schreiben die totale Zeitableitung mit den jeweilig partiellen Ableitungen aus, sodass wir haben

$$L'(q_i,\, \dot{q}_i,\, t) = L(q_i,\, \dot{q}_i,\, t) + \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{s.37}$$

Die beiden Seiten der Lagrangefunktion für $L'(q_i,\, \dot{q}_i,\, t)$ lauten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i}, \tag{s.38}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i}, \tag{s.39}$$

indem wir benutzen, dass die totale Zeitableitung $\frac{d}{dt}$ und partielle Ortsableitung $\frac{\partial}{\partial q_i}$ vertauschen. Damit glit offensichtlich

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \tag{s.40}$$

womit die Euler-Lagrange Gleichungen invariant bleiben.

Ex 3: Gauge transformations of the Lagrangian. Parts a) & c)

a) The equations of motion are given by the Euler-Lagrange equations. We compute:

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = -t\dot{x}\frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{and} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - tF(x)$$

Then $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} - F(x) - t\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\dot{x}$

$\rightsquigarrow$ Euler-Lagrange $\rightarrow$ $\cancel{-t\dot{x}\frac{\partial F}{\partial x}} = m\ddot{x} - F(x) \cancel{- t\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}}$

$\rightarrow$ $\boxed{m\ddot{x} = F(x)}$

This is the equation of motion of a particle of mass m (in 1 dimension), moving under the action of a force $F(x)$.

c) A 1-dim. particle with mass m evolving under a potential $V(x)$ is described by the Lagrangian

$$L_2(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x).$$

The difference $L_1 - L_2$ is

$$L_1 - L_2 = -t\dot{x}F(x) + V(x) = t\dot{x}\frac{\partial V}{\partial x} + V(x)$$

The potential $V(x)$ depends on time only implicitly via $x \equiv x(t)$, so we have

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \dot{x} \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \right)$$

We can then express $L_1 - L_2$ as

$$L_1 - L_2 = t\frac{dV}{dt} + V(x) = \frac{d}{dt}(tV) - V + V = \frac{d}{dt}(tV)$$

We can therefore set

$$\underline{f(x,t) = t \cdot V(x)}$$

and we have as desired $L_1 - L_2 = \frac{df}{dt}$.