Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2022

Übungsblatt 9
Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Abgabe bis: 18.06.2021 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Noether-Theorem Aufwärmübung

Wir betrachten ein System mit einem Teilchen in einem Potential. Die Lagrange-Funktion lautet:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - a(y^2 + z^2)$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}$ invariant unter der folgenden Transformation ist:

$$\begin{aligned} x(t,\alpha) &= x(t) + \alpha \\ y(t,\alpha) &= y(t) \\ z(t,\alpha) &= z(t) \end{aligned} \tag{1}$$

(b) Nutzen Sie das Noether-Theorem um zu zeigen, welche Erhaltungsgröße aus der Invarianz unter der Transformation (1) folgt.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}$ auch unter der folgenden Transformation invariant ist:

$$\begin{aligned} x(t,\alpha) &= x(t) \\ y(t,\alpha) &= y(t)\cos\alpha - z(t)\sin\alpha \\ z(t,\alpha) &= y(t)\sin\alpha + z(t)\cos\alpha \end{aligned} \tag{2}$$

(d) Nutzen Sie das Noether-Theorem um zu zeigen, welche Erhaltungsgröße aus der Invarianz unter der Transformation (2) folgt.

Aufgabe 2: Variationsrechung und Hamiltonsches Prinzip

Die Variationsrechnung ist eine vielseitige Methode, welche in Zusammenarbeit mit dem Lagrange-Formalismus zu einer vereinfachten Herleitung der Bewegungsgleichungen von Systemen in der klassischen Mechanik führen kann.

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, welches sich in 3 Dimensionen auf der Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ in einem Potential $V(\boldsymbol{r})$ bewegt. Die Lagrange-Funktion L ist gegeben durch $L = T - V$, wobei T die kinetische Energie des Systems ist. Für feste Werte t_0, t_1 mit $t_0 < t_1$ ist die *Wirkung* $S[\boldsymbol{r}(t)]$ definiert als

$$S[\boldsymbol{r}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L(\boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t), t)\ . \tag{3}$$

Laut dem Hamiltonschen Prinzip ist die tatsächliche physikalische Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ so, dass die Wirkung extremal wird.

Die Variationsrechnung erlaubt uns, diese Extremalisierung zu bestimmen. Eine beliebige Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ für $t_0 \le t \le t_1$ sei gegeben. Man betrachte eine *Variation* $\boldsymbol{r}(t) \to \boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}(t) + \delta\boldsymbol{r}(t)$ mit einer infinitesimalen Verrückung $\delta\boldsymbol{r}(t)$ für jede t mit den Randbedingungen $\delta\boldsymbol{r}(t_0) = \delta\boldsymbol{r}(t_1) = 0$. Im Folgenden wird das Argument (t) oft nicht explizit geschrieben.

Die Variation $\delta F[\boldsymbol{r}(t)]$ einer beliebigen Funktion $F[\boldsymbol{r}(t)]$ der Bahnkurve ist die infinitesimale Änderung von $F[\boldsymbol{r}(t)]$ in der erster Ordnung in $\delta\boldsymbol{r}(t)$. Zum Beispiel für einen konstanten Vektor $\boldsymbol{a}$, kann man die Variation $\delta(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})$ finden durch $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}\cdot\delta\boldsymbol{r}$, sodass $\delta(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}\cdot\delta\boldsymbol{r}$; wären Terme höherer Ordnung in $\delta\boldsymbol{r}$ aufgetreten dann hätten wir diese weglassen können. Die Funktion $F[\boldsymbol{r}(t)]$ wird genau dann extremalisiert, wenn $\delta F[\boldsymbol{r}(t)] = 0$ für alle solche Verrückungen.

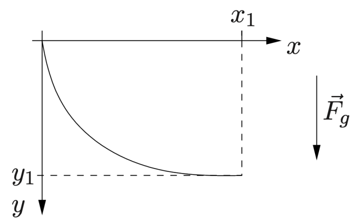
(a) Sei $f(\boldsymbol{r})$ ein hinreichend glattes Skalarfeld und sei $g(x)$ eine Funktion mit Ableitung $g'(x)$. Zeigen Sie:
   (i) $\delta(\boldsymbol{r}^2(t)) = 2\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}$;
   (ii) $\delta\big(\sqrt{f(\boldsymbol{r})}\big) = \frac{1}{2\sqrt{f(\boldsymbol{r})}}\,\delta f(\boldsymbol{r})$;
   (iii) $\delta\, g(f(\boldsymbol{r})) = g'(f(\boldsymbol{r}))\,\delta f(\boldsymbol{r})$;
   (iv) $\delta f(\boldsymbol{r}) = (\nabla f)\cdot\delta\boldsymbol{r}$;
   (v) $\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{r} = \delta\dot{\boldsymbol{r}}$;
   (vi) $\delta\int_{t_0}^{t_1} f(\boldsymbol{r})\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\delta f(\boldsymbol{r})\,dt$.

(b) Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das sich frei in 3 Dimensionen bewegen kann. Berechnen Sie die Variation der Wirkung, und zeigen Sie, dass diese genau dann immer verschwindet, wenn $\boldsymbol{r}(t)$ eine gleichförmige Bewegung ist.

   Hinweise: Verwenden Sie eine partielle Integration. Zudem wird verlangt, dass die Variation $\delta S[\boldsymbol{r}(t)]$ für alle beliebige Variationen $\delta\boldsymbol{r}(t)$ mit $\delta\boldsymbol{r}(t_0) = \delta\boldsymbol{r}(t_1) = 0$ verschwindet.

(c) Betrachten Sie einen allgemeinen System mit generalisierten Koordinaten $q_1, \ldots q_N$ und Lagrangefunktion $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Zeigen Sie, dass die Wirkung (3) genau dann extermalisiert wird, wann die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt sind.

Aufgabe 3: Optimale Rutsche



Ein Teilchen der Masse m bewege sich reibungsfrei auf einer Rutsche im Schwerefeld der Erde vom Punkt $P_0 = (0,0)$ zu einem Punkt $P_1 = (x_1, y_1)$. Am Startpunkt P_0 sei das Teilchen in Ruhe. Die Form der Rutsche sei durch die Funktion $y(x)$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie das Funktional $T[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(y', y, x)dx$ für die Laufzeit von P_0 nach P_1 in Abhängigkeit von $y(x)$. Nutzen Sie dazu die Definition der Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$.
   Hinweis. Der Zusammenhang zwischen v und y kann über Energieerhaltung bestimmt werden.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx}f(y,y') = 0 \ \text{ für } \ f(y,y') = \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$$

   mit $y' = \frac{dy}{dx}$. Können Sie schon anhand des zu minimierenden Funktionals ableiten, dass $f(y,y')$ für die optimale Rutsche erhalten sein muss?

(c) Zeigen Sie, dass die optimale Bahnkurve über Funktionen $x = x(\theta) = R(\theta - \sin(\theta))$, $y = y(\theta) = R(1-\cos(\theta))$ mit $0 \le \theta \le 2\pi$ parametrisiert werden kann. Bestimmen sie R für $y_1 = 0$. Was ist an dieser Kurve besonders?

(d) Skizzieren Sie die optimale Bahnkurve.