Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2022

Übungsblatt 9
Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Abgabe bis: 18.06.2021 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Noether-Theorem Aufwärmübung

Wir betrachten ein System mit einem Teilchen in einem Potential. Die Lagrange-Funktion lautet:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - a(y^2 + z^2)$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}$ invariant unter der folgenden Transformation ist:

$$\begin{aligned} x(t,\alpha) &= x(t) + \alpha \\ y(t,\alpha) &= y(t) \\ z(t,\alpha) &= z(t) \end{aligned} \tag{1}$$

Lösung: $\mathcal{L}$ hängt nicht explizit von x ab. Für $\dot{x}(t,\alpha)$ gilt $\dot{x}(t,\alpha) = \dot{x}(t) + 0$. D.h. $\mathcal{L}$ hängt überhaupt nicht von α ab, und es folgt offensichtlich, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathcal{L} = 0$ (hier sogar nicht nur wenn $\alpha = 0$ eingesetzt wird).

(b) Nutzen Sie das Noether-Theorem um zu zeigen, welche Erhaltungsgröße aus der Invarianz unter der Transformation (1) folgt.

Lösung: Erhaltungsgröße ist allgemein:

$$\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial q_j}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} \right)$$

Die einzige Ableitung $\frac{\partial q_j}{\partial \alpha}$, die hier nicht 0 wird, ist:

$$\frac{\partial x(t,\alpha)}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = 1$$

Also ist die Größe

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = m\dot{x}$$

erhalten. (Impuls in x-Richtung)

(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}$ auch unter der folgenden Transformation invariant ist:

$$\begin{aligned} x(t,\alpha) &= x(t) \\ y(t,\alpha) &= y(t)\cos\alpha - z(t)\sin\alpha \\ z(t,\alpha) &= y(t)\sin\alpha + z(t)\cos\alpha \end{aligned} \tag{2}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} y(t,\alpha)^2 + z(t,\alpha)^2 &= y^2\cos^2\alpha - 2zy\cos\alpha\sin\alpha + z^2\sin^2\alpha \\ &\quad + y^2\sin^2\alpha + 2zy\cos\alpha\sin\alpha + z^2\cos^2\alpha \\ &= y^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + z^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \\ &= y^2 + z^2 \end{aligned}$$

Analog folgt für $\dot{y}(t,\alpha)$ und $\dot{z}(t,\alpha)$:

$$\dot{y}(t,\alpha)^2 + \dot{z}(t,\alpha)^2 = \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

Daraus folgt sofort, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathcal{L} = 0$.

(d) Nutzen Sie das Noether-Theorem um zu zeigen, welche Erhaltungsgröße aus der Invarianz unter der Transformation (2) folgt.

Lösung: Wir nutzen wiederum die Formel für die Erhaltungsgröße

$$\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \left(\left.\frac{\partial q_j}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \right),$$

die sich hier ergibt zu:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \left(\left.\frac{\partial y(t,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \left(\left.\frac{\partial z(t,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \right)$$

Mit

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial y(t,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} &= \left.(-y\sin\alpha - z\cos\alpha)\right|_{\alpha=0} = -z(t) \\ \left.\frac{\partial z(t,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} &= \left.(y\cos\alpha - z\sin\alpha)\right|_{\alpha=0} = y(t) \end{aligned}$$

folgt also, dass folgende Größe erhalten ist:

$$m\,(\dot{z}y - \dot{y}z)$$

(x-Komponente des Drehimpulses)

Aufgabe 2: Variationsrechung und Hamiltonsches Prinzip

Die Variationsrechnung ist eine vielseitige Methode, welche in Zusammenarbeit mit dem Lagrange-Formalismus zu einer vereinfachten Herleitung der Bewegungsgleichungen von Systemen in der klassischen Mechanik führen kann.

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, welches sich in 3 Dimensionen auf der Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ in einem Potential $V(\boldsymbol{r})$ bewegt. Die Lagrange-Funktion L ist gegeben durch $L = T - V$, wobei T die kinetische Energie des Systems ist. Für feste Werte t_0, t_1 mit $t_0 < t_1$ ist die *Wirkung* $S[\boldsymbol{r}(t)]$ definiert als

$$S[\boldsymbol{r}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L(\boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t), t)\ . \tag{3}$$

Laut dem Hamiltonschen Prinzip ist die tatsächliche physikalische Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ so, dass die Wirkung extremal wird.

Die Variationsrechnung erlaubt uns, diese Extremalisierung zu bestimmen. Eine beliebige Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ für $t_0 \le t \le t_1$ sei gegeben. Man betrachte eine *Variation* $\boldsymbol{r}(t) \to \boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}(t) + \delta\boldsymbol{r}(t)$ mit einer infinitesimalen Verrückung $\delta\boldsymbol{r}(t)$ für jede t mit den Randbedingungen $\delta\boldsymbol{r}(t_0) = \delta\boldsymbol{r}(t_1) = 0$. Im Folgenden wird das Argument (t) oft nicht explizit geschrieben. Die Variation $\delta F[\boldsymbol{r}(t)]$ einer beliebigen Funktion $F[\boldsymbol{r}(t)]$ der Bahnkurve ist die infinitesimale Änderung von $F[\boldsymbol{r}(t)]$ in der erster Ordnung in $\delta\boldsymbol{r}(t)$. Zum Beispiel für einen konstanten Vektor $\boldsymbol{a}$, kann man die Variation $\delta(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})$ finden durch $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}\cdot\delta\boldsymbol{r}$, sodass $\delta(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}\cdot\delta\boldsymbol{r}$; wären Terme höherer Ordnung in $\delta\boldsymbol{r}$ aufgetreten dann hätten wir diese weglassen können. Die Funktion $F[\boldsymbol{r}(t)]$ wird genau dann extremalisiert, wenn $\delta F[\boldsymbol{r}(t)] = 0$ für alle solche Verrückungen.

Side note: Here we could have been more precise in defining what we meant by "second order in $\delta\boldsymbol{r}(t)$", since $\delta\boldsymbol{r}(t)$ is in fact a continuum of real values. To define the variation more precisely, we should define the variation of $\boldsymbol{r}(t)$ as $\delta\boldsymbol{r}(t) = \epsilon\boldsymbol{\eta}(t)$ for a curve $\boldsymbol{\eta}(t)$ and for $\epsilon > 0$; then the variation of a functional $F[\boldsymbol{r}(t)]$ of the path $\boldsymbol{r}(t)$ is defined as the term of first order in ϵ in the expansion of $F[\boldsymbol{r}(t)]$ locally around $\boldsymbol{r}(t)$:

$$F[\boldsymbol{r}(t) + \delta r(t)] = F[\boldsymbol{r}(t)] + \underbrace{(\ \cdots\ )}_{=:\,\delta F[\boldsymbol{r}(t)]} \cdot \epsilon + O(\epsilon^2) \ . \tag{s.1}$$

The variation can also be written as

$$\delta F[\boldsymbol{r}(t)] = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{F[\boldsymbol{r}(t) + \delta\boldsymbol{r}(t)] - F[\boldsymbol{r}(t)]}{\epsilon} \ . \tag{s.2}$$

The general strategy to compute the variation of a quantity is to compare the quantity before and after the variation, and to identify in the difference the first-order term in ϵ.

(a) Sei $f(\boldsymbol{r})$ ein hinreichend glattes Skalarfeld und sei $g(x)$ eine Funktion mit Ableitung $g'(x)$. Zeigen Sie:

(i) $\delta(\boldsymbol{r}^2(t)) = 2\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}$;

Lösung: The variation can be computed as

$$\boldsymbol{r}^2 \to \boldsymbol{r}'^2 = (\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r})^2 = \boldsymbol{r} + 2\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r} + O\big(\epsilon^2\big) \ . \tag{s.3}$$

The first order term is the variation, namely, $\delta(\boldsymbol{r}^2) = 2\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}$. (This answer can alternatively be deduced as a special case of point (iv) below.)

(ii) $\delta\big(\sqrt{f(\boldsymbol{r})}\big) = \frac{1}{2\sqrt{f(\boldsymbol{r})}}\,\delta f(\boldsymbol{r})$;

Lösung: By definition, we have $f(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}) \approx f(\boldsymbol{r}) + \delta f(\boldsymbol{r})$, keeping only the first order terms in the variation. Then to first order in $\delta\boldsymbol{r}$, and using the expansion $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2)$, we find

$$\begin{aligned}\sqrt{f(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r})} &\approx \sqrt{f(\boldsymbol{r})}\,\sqrt{1 + \frac{\delta f(\boldsymbol{r})}{f(\boldsymbol{r})}} \approx \sqrt{f(\boldsymbol{r})}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\delta f(\boldsymbol{r})}{f(\boldsymbol{r})}\right] \\ &= \sqrt{f(\boldsymbol{r})} + \frac{1}{2\sqrt{f(\boldsymbol{r})}}\,\delta f(\boldsymbol{r}) \ .\end{aligned} \tag{s.4}$$

The last term is by definition the variation we were looking for. (This answer can alternatively be deduced as a special case of point (iii) below.)

(iii) $\delta\, g(f(\boldsymbol{r})) = g'(f(\boldsymbol{r}))\,\delta f(\boldsymbol{r})$;

Lösung: The first order expansion of $g(x)$ around the point $f(\boldsymbol{r})$ gives us:

$$g(f(\boldsymbol{r}) + y) = g(f(\boldsymbol{r})) + g'(f(\boldsymbol{r}))\,y + O(y^2) \ . \tag{s.5}$$

Therefore, keeping only the terms of first order in ϵ,

$$g(f(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r})) \approx g(f(\boldsymbol{r}) + \delta f(\boldsymbol{r})) \approx g(f(\boldsymbol{r})) + g'(f(\boldsymbol{r}))\,\delta f(\boldsymbol{r}) \ . \tag{s.6}$$

Again, the last term is the variation we were looking for.

(iv) $\delta f(\boldsymbol{r}) = (\nabla f) \cdot \delta \boldsymbol{r}$;

Lösung: The first order expansion of $f(\boldsymbol{r})$ around $\boldsymbol{r}$ is

$$f(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}) \approx f(\boldsymbol{r}) + (\nabla f)\cdot\delta\boldsymbol{r} \ . \tag{s.7}$$

We can identify the last term as the sought variation.

(v) $\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{r} = \delta\dot{\boldsymbol{r}}$;

Lösung: The key to understanding this relation is that the two types of "derivative" in fact probe very different aspects of the curve $\boldsymbol{r}(t)$. Intuitively, while d/dt is a derivative *along* the curve, $\delta\boldsymbol{r}(t)$ is a *spatial* displacement for a fixed value of t.

We can show this relation by considering the variation of $\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \to \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}\big(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}\big) = \dot{\boldsymbol{r}} + \frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{r} \ , \tag{s.8}$$

from which we can read off

$$\delta\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{r} \ . \tag{s.9}$$

(vi) $\delta\int_{t_0}^{t_1} f(\boldsymbol{r})\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\delta f(\boldsymbol{r})\,dt$.

Lösung: A similar argument holds for integration along t. Varying the integral, and keeping only the first order terms, we find:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} dt\, f(\boldsymbol{r}) \ \to \int_{t_0}^{t_1} dt\, f(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}) &\approx \int_{t_0}^{t_1} dt\,\big[f(\boldsymbol{r})+\delta f(\boldsymbol{r})\big] \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt\, f(\boldsymbol{r}) + \int_{t_0}^{t_1} dt\,\delta f(\boldsymbol{r}) \ . \end{aligned} \tag{s.10}$$

We can identify the last term as the sought variation.

(b) Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das sich frei in 3 Dimensionen bewegen kann. Berechnen Sie die Variation der Wirkung, und zeigen Sie, dass diese genau dann immer verschwindet, wenn $\boldsymbol{r}(t)$ eine gleichförmige Bewegung ist.

Hinweise: Verwenden Sie eine partielle Integration. Zudem wird verlangt, dass die Variation $\delta S[\boldsymbol{r}(t)]$ für alle beliebige Variationen $\delta\boldsymbol{r}(t)$ mit $\delta\boldsymbol{r}(t_0) = \delta\boldsymbol{r}(t_1) = 0$ verschwindet.

Lösung: The Lagrangian is $L(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2$. We can compute the variation of the action as

$$\begin{aligned}\delta S[\boldsymbol{r}(t)] = \delta\int_{t_0}^{t_1} dt\, L(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) &= \int_{t_0}^{t_1} dt\,\delta L(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) = \int_{t_0}^{t_1} dt\,\delta\Big(\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2\Big) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt\,\Big(m\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}\Big) = \int_{t_0}^{t_1} dt\,\Big(m\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{r}\Big) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt\,\Big[\frac{d}{dt}\Big(m\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\delta\boldsymbol{r}\Big) - m\ddot{\boldsymbol{r}}\delta\boldsymbol{r}\Big] \\ &= \underbrace{\Big[m\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\delta\boldsymbol{r}\Big]_{t_0}^{t_1}}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} dt\, m\ddot{\boldsymbol{r}}\delta\boldsymbol{r} \ , \end{aligned} \tag{s.11}$$

where the first term vanishes thanks to the boundary conditions $\delta\boldsymbol{r}(t_0) = \delta\boldsymbol{r}(t_1) = 0$. We require that the variation $\delta S[\boldsymbol{r}(t)]$ must vanish for *any* choice of the variation $\delta\boldsymbol{r}(t)$; the only way this can happen is if the term $m\ddot{\boldsymbol{r}}$ inside the remaining integral vanishes entirely:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = 0 \ . \tag{s.12}$$

This implies that the trajectory $\boldsymbol{r}(t)$ is a uniform motion.

(c) Betrachten Sie einen allgemeinen System mit generalisierten Koordinaten $q_1, \ldots q_N$ und Lagrangefunktion $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Zeigen Sie, dass die Wirkung (3) genau dann extermalisiert wird, wann die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt sind.

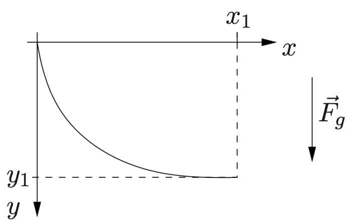
Lösung: We proceed as above:

$$\begin{aligned}
0 \overset{!}{=} \delta S[\boldsymbol{q}(t)] = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt\, L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] \\
&= \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right] \\
&\overset{\text{P.I.}}{=} \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \sum \Big(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big) \delta q_i \right] \\
&= \sum_i \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i \ . \qquad \text{(s.13)}
\end{aligned}$$

In the first line and to obtain the second line we used properties derived in part (a) of the exercise. In the step labeled "P.I." we used an integration by parts, all while noting that the variation must vanish at the edge points of the integral.

Because the expression in (s.13) must vanish for all variations $\delta q_i(t)$, we must have that the term in square brackets vanishes for all i. Therefore the Euler-Lagrange equations must hold. (And conversely, if the Euler-Lagrange equations hold, then the variation of the action vanishes.)

Aufgabe 3: Optimale Rutsche



Ein Teilchen der Masse m bewege sich reibungsfrei auf einer Rutsche im Schwerefeld der Erde vom Punkt $P_0 = (0,0)$ zu einem Punkt $P_1 = (x_1, y_1)$. Am Startpunkt P_0 sei das Teilchen in Ruhe. Die Form der Rutsche sei durch die Funktion $y(x)$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie das Funktional $T[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(y', y, x) dx$ für die Laufzeit von P_0 nach P_1 in Abhängigkeit von $y(x)$. Nutzen Sie dazu die Definition der Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$.
Hinweis. Der Zusammenhang zwischen v und y kann über Energieerhaltung bestimmt werden.

Lösung: Unter Beachtung der Orientierung des Koordinatensystemes haben wir $E_{kin} = \frac{m}{2} v^2$ und $E_{pot} = -mgy$. Die Energie des Systemes is offensichtlich erhalten, somit gilt

$$v = \sqrt{2gy}, \qquad \text{(s.14)}$$

wo die auch gilt $v = \frac{ds}{dt}$. Wir drücken das Linienelement ds entlang der Kurve über die $x-$Koordinate aus

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (1 + y'^2) dx^2 \qquad \text{(s.15)}$$
$$\Rightarrow ds = \sqrt{1 + y'^2} dx. \qquad \text{(s.16)}$$

Zusammengefasst erhalten wir für das Zeitelement damit

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx. \qquad \text{(s.17)}$$

Die Gesamte Laufzeit ist also über das Funktional

$$T[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \underbrace{\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}}_{F(y,y')} dx \tag{s.18}$$

gegeben.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx} f(y,y') = 0 \quad \text{für} \quad f(y,y') = \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$$

mit $y' = \frac{dy}{dx}$. Können Sie schon anhand des zu minimierenden Funktionals ableiten, dass $f(y,y')$ für die optimale Rutsche erhalten sein muss?

Lösung: Weg 1: Geschicktes Umstellen von Zeitableitungen

Zur Wiederholung: Betrachten wir die totale $x-$Ableitung der Funktion $F(y',y,x)$ wie oben, dann haben wir

$$\frac{d}{dx} F = \frac{\partial F}{\partial y'} y'' + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial x}. \tag{s.19}$$

Ausserdem gilt

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} y'\right) = \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right) y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' \tag{s.20}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' \tag{s.21}$$

wo wir im Übergang zur letzten Zeile die Euler-Lagrange Gleichung benutzt haben. Fassen wir (s.19) und (s.20) zusammen, haben wir also

$$\frac{d}{dx}\left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y'\right) = \frac{\partial F}{\partial x}. \tag{s.22}$$

Da nun aber die Funktion $F(y,y')$ in (s.18) nicht explizit von der Zeit abhängt, gilt

$$\frac{d}{dx} f(y,y') = 0 \tag{s.23}$$

mit $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$,

$$f(y,y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}. \tag{s.24}$$

Im Lagrange Formalismus, also wenn F die Lagrangefunktion ist, impliziert die analoge Herleitung in Systemen mit explizit zeitunabhängiger Lagrangefunktion dass die Energie $E = T + V$ erhalten ist.

Weg 2: Direkt den Ausdruck ausrechnen

Aus der Definition von f und F erkennen wir, dass

$$f = \frac{F}{1+y'^2} \tag{s.25}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = f y' \tag{s.26}$$

und damit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{F}{1+y'^2} = \text{ (Produktregel) } = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1+y'^2} + F\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1+y'^2} \tag{s.27}$$

Wir berechnen diese beiden Ausdrücke separat. Es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' = \text{ (Euler-Lagrange) } = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y''$$

da F nicht explizit von der Zeit abhängt. Nun verwenden wir (s.26) sowie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}fy' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}y' + fy'',$$

um zu schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}y'^2 + fy''y' + fy'y'' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}y'^2 + 2fy'y'' \tag{s.28}$$

Außerdem benötigen wir:

$$F\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1+y'^2} = -F\frac{1}{(1+y'^2)^2}2y'y'' = -\frac{1}{1+y'^2}2fy'y'' \tag{s.29}$$

Wir verwenden diese Resultate, um die Rechnung in (s.27) fortzusetzen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f = \frac{1}{1+y'^2}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}y'^2 + 2fy'y'' - 2fy'y''\right] = \frac{y'^2}{1+y'^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \tag{s.30}$$

Umformen ergibt die gewünschte Aussage:

$$\underbrace{\left(1 - \frac{y'^2}{1+y'^2}\right)}_{=\frac{1}{1+y'^2}}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 0$$

Way 3: Recognize the "Hamitonian" of the system

Because F doesn't explicitly depend on x, we know that there is an associated conserved quantity $G = y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F$. (If we interpret F as a Lagrangian and x as "time", then G correpsonds to the "Hamiltonian" of the system. The fact that G is conserved can be shown using the Euler-Lagrange equation.)

Let's compute

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} = \frac{1}{2F}\frac{1}{y}(2y') = \frac{y'}{y}\sqrt{\frac{y}{1+y'^2}} = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\ . \tag{s.31}$$

Then

$$G = y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F = \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \frac{1+y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = f(y,y')\ . \tag{s.32}$$

We know that G is conserved along x, namely $dG/dx = 0$, and therefore $df/dx = 0$.

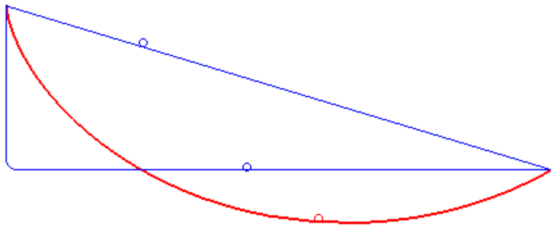


Abbildung 1: Die Brachistochrone.

(c) Zeigen Sie, dass die optimale Bahnkurve über Funktionen $x = x(\theta) = R(\theta - \sin(\theta))$, $y = y(\theta) = R(1 - \cos(\theta))$ mit $0 \leq \theta \leq 2\pi$ parametrisiert werden kann. Bestimmen sie R für $y_1 = 0$. Was ist an dieser Kurve besonders?

Lösung: Da f aus der vorherigen Unteraufgabe konstant in x ist, haben wir auch

$$y(1 + y'^2) = 2R = const. \tag{s.33}$$

Oder equivalent

$$y'^2 - \frac{2R}{y} = -1. \tag{s.34}$$

Wir sehen, dass $x(\theta), y(\theta)$ diese Gleichung Lösen, mit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}. \tag{s.35}$$

Da $P_0 = (0, 0)^T$, haben wir $\theta_0 = 0$. θ_1 ist implizit über folgende Gleichungen gegeben

$$x_1 = R(\theta_1 - \sin\theta_1)$$
$$y_1 = R(1 - \cos\theta_1).$$

Im Fall $y_1 = 0$ erhalten wir eine nichttriviale Lösung für $\theta_1 = 2\pi$, eingesetzt in den Ausdruck für x_1 ergibt das $R = \frac{x_1}{2\pi}$. Im Spezialafall $y_1 = 0$ ist die Kurve symmetrisch um ihr Minimum bei $\theta = \pi$ und $x(\pi) = \frac{x_1}{2}$. Die Symmetrie sieht man insbesondere da hier $\frac{dy}{dx}(2\pi - \theta) = -\frac{dy}{dx}(\theta)$ gilt.

(d) Skizzieren Sie die optimale Bahnkurve.

Lösung: Die erhaltene Bahnkurve heisst Brachistochrone (Abb. 1). Ihre Herleitung von Johann Bernoulli 1969 wird als Geburtsstunde der Variationsrechnung angesehen (`https://de.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone`).