

Übungsblatt 10
Legendretransformation und Hamilton-Formalismus

Abgabe bis: 1.07.2022 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Legendre Transformation

Die Hamiltonsche Mechanik und die Lagrange Mechanik ergeben sich aus einander, indem die Freiheitsgrade des Systems entweder mit (q, \dot{q}) oder (q, p) parametrisiert werden. Dadurch wird die Rolle der Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ durch die Hamiltonfunktion $H(q, p, t)$ besetzt und umgekehrt.

Die Dualitätsbeziehung zwischen \dot{q} und p und damit L und H beruht auf einem allgemeineren mathematischen Prinzip der Legendre-Dualität (oder noch allgemeiner der Fenchel-Dualität). Diese Dualität ist eines der wichtigsten Konzepte der konvexen Analysis und Theorie der konvexen Optimierung. Neben der Mechanik spielt die Legendre-Dualität auch im Übergang zwischen unterschiedlichen Beschreibungen der Thermodynamik eine wichtige Rolle. Hier wollen wir uns einmal genauer anschauen, was dahinter steckt.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet man als *konvex*, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt, dass $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$. Gilt diese Bedingung als strikte Ungleichung für $\lambda \in (0, 1)$ und $x_1 \neq x_2$ so nennt man f *streng konvex*.

(a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ eine konvexe Funktion ist.

(Zusatzaufgabe: Für multidimensionale quadratische Funktionen gilt allgemeiner: Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^T A x$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ einer symmetrischen, positiv-definiten Matrix ist konvex. Zeigen Sie auch dies.)

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die *Legendre-transformierte* oder *konvex-konjugierte* Funktion

$$f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \quad x^* \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (x \cdot x^* - f(x)) .$$

(b) Zeigen Sie, dass f^* eine konvexe Funktion ist.

(c) Sei f streng konvex und stetig differenzierbar. Argumentieren Sie, dass dann

$$f^*(x^*) = x^* \cdot \tilde{x} - F(\tilde{x}),$$

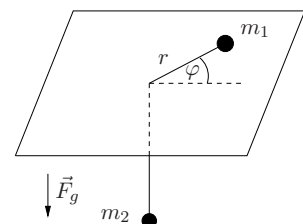
wobei \tilde{x} durch die Bedingung $x^* = \nabla f(\tilde{x})$ eindeutig festgelegt ist.

(d) Geben Sie eine geometrische Interpretation der Legendre-transformierten Funktion f^* einer streng konvexen, differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. *Hinweis: Betrachten Sie dazu die Tangenten an dem Graphen der Funktion.*

(e) Zeigen Sie, dass die Legendre-Transformation für stetig differenzierbare, strikt konvexe Funktionen eine Involution ist, d.h. es gilt $(f^*)^*(x) = f(x)$.

Aufgabe 2: Verbundene Massen mit planarer Zwangsbedingung

Zwei Massen m_1 und m_2 sind durch einen Faden der Länge L verbunden, der durch ein Loch in einer horizontalen Fläche (der $(x-y)$ -Ebene) verläuft. Die Masse m_1 gleitet reibungslos auf der horizontalen Fläche, während m_2 senkrecht nach unten hängt und sich nur in Richtung der Gravitationskraft bewegt.



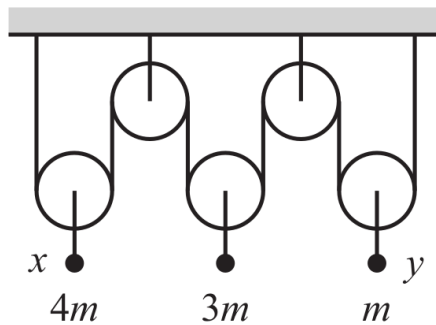
Dieses System kann durch zwei verallgemeinerte Koordinaten beschrieben werden, die als Radial- und Winkelkoordinaten der ersten Masse gewählt werden können. Wenn wir $r := r_1$ und $\phi := \phi_1$ definieren und weiter annehmen, dass die beiden Massen gleich ($m_1 = m_2 = m$) sind, ist die Lagrangefunktion dieses Systems

$$L = m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - mgr.$$

- Geben Sie die zugehörige Hamiltonfunktion an.
- Wie lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen? Benutzen Sie diese, um die Bewegungsgleichungen für die kanonischen Koordinaten und Impulse dieses Systems aufzuschreiben.
- Ist die Hamiltonfunktion eine Erhaltungsgröße? Ist die Energie eine Erhaltungsgröße? Begründen Sie Ihre Antworten!
- Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Klammer, dass der Drehimpuls der ersten Masse $p_\phi = mr^2\dot{\phi}$ eine Erhaltungsgröße ist.

Aufgabe 3: Eine andere Atwoodsche Fallmaschine

Betrachten Sie die Atwoodsche Fallmaschine in der folgenden Abbildung:



Die 3 Massen (von links nach rechts) sind $4m$, $3m$ und m . Es wirkt eine Gravitationskraft mit Gravitationsbeschleunigung g auf alle Masse. Die Bewegung der Massen erfolgt nur entlang der Richtung der Gravitationskraft. Die Rollen und Seile der Maschine können als masselos angenommen werden.

- Stellen Sie die Lagrangefunktion für dieses System auf.
Hinweis. Die Positionen der linken und rechten Masse sind geeignete verallgemeinerte Koordinaten.
- Neben der Energie hat dieses System noch eine andere Erhaltungsgröße, die wir nun berechnen wollen. Finden Sie hierzu eine kontinuierliche Transformation der verallgemeinerten Koordinaten, welche die Lagrangefunktion invariant lässt. Nutzen Sie das Noether-Theorem, um die dazugehörige Erhaltungsgröße zu berechnen.
Hinweis. Gute Kandidaten für die Transformation sind solche, die Zeitableitung der einzelnen Koordinaten \dot{q}_i überhaupt nicht verändern, und gleichzeitig den Potentialterm invariant lassen.