Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2022

Übungsblatt 10
Legendretransformation und Hamilton-Formalismus

Abgabe bis: 1.07.2022 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Legendre Transformation

Die Hamiltonsche Mechanik und die Lagrange Mechanik ergeben sich aus einander, indem die Freiheitsgrade des Systems entweder mit $(q, \dot{q})$ oder (q, p) parametrisiert werden. Dadurch wird die Rolle der Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ durch die Hamiltonfunktion $H(q, p, t)$ besetzt und umgekehrt.

Die Dualitätsbeziehung zwischen $\dot{q}$ und p und damit L und H beruht auf einem allgemeineren mathematischen Prinzip der Legendre-Dualität (oder noch allgemeiner der Fenchel-Dualität). Diese Dualität ist eines der wichtigsten Konzepte der konvexen Analysis und Theorie der konvexen Optimierung. Neben der Mechanik spielt die Legendre-Dualität auch im Übergang zwischen unterschiedlichen Beschreibungen der Thermodynamik eine wichtige Rolle. Hier wollen wir uns einmal genauer anschauen, was dahinter steckt.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezeichnet man als *konvex*, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt, dass $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$. Gilt diese Bedingung als strikte Ungleichung für $\lambda \in (0, 1)$ und $x_1 \neq x_2$ so nennt man f *streng konvex*.

(a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ eine konvexe Funktion ist.

Lösung: Sei $\lambda \in [0, 1]$ und $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Nach Definition gilt es zu zeigen, dass

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

ist. Für $f(x) = x^2$ haben wir

$$\begin{aligned}
(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)^2 &\leq \lambda x_1^2 + (1 - \lambda)x_2^2 \\
\iff 0 &\leq -\lambda^2 x_1^2 - (1 - \lambda)^2 x_2^2 - 2\lambda(1 - \lambda)x_1 x_2 + \lambda x_1^2 + (1 - \lambda)x_2^2 \\
&= \lambda(1 - \lambda)x_1^2 + \lambda(1 - \lambda)x_2^2 - 2\lambda(1 - \lambda)x_1 x_2 \\
&= \lambda(1 - \lambda)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2) \\
&= \lambda(1 - \lambda)(x_1 - x_2)^2.
\end{aligned}$$

Dies gilt, da für $\lambda \in [0, 1]$ alle Faktoren in der letzten Zeile positiv sind.

(Zusatzaufgabe: Für multidimensionale quadratische Funktionen gilt allgemeiner: Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to R$, $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ einer symmetrischen, positiv-definiten Matrix ist konvex. Zeigen Sie auch dies.)

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definieren wir die *Legendre-transformierte* oder *konvex-konjugierte* Funktion

$$f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \quad x^* \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (x \cdot x^* - f(x)) \ .$$

(b) Zeigen Sie, dass f^* eine konvexe Funktion ist.

Lösung: Dies gilt tasächlich per Definition bereits für beliebige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wir können die Konvexität direkt überprüfen. Sei $\lambda \in [0,1]$ und $x_1^*, x_2^* \in \mathbb{R}^n$, so gilt

$$\begin{aligned} f^*(\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(x \cdot (\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*) - f(x)\right) \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\lambda\left(x \cdot x_1^* - f(x)\right) + (1-\lambda)\left(x \cdot x_2^* - f(x)\right)\right) \\ &\leq \lambda \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(x \cdot x_1^* - f(x)\right) + (1-\lambda) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(x \cdot x_2^* - f(x)\right) \\ &= \lambda f^*(x_1^*) + (1-\lambda) f^*(x_2^*). \end{aligned}$$

(c) Sei f streng konvex und stetig differenzierbar. Argumentieren Sie, dass dann

$$f^*(x^*) = x^* \cdot \tilde{x} - F(\tilde{x}),$$

wobei $\tilde{x}$ durch die Bedingung $x^* = \nabla f(\tilde{x})$ eindeutig festgelegt ist.

Lösung: Sei $g(x) = x^* \cdot x - f(x)$. Die Legendre-Transformierte ist definiert als $f^*(x^*) = \sup_{x\in\mathbb{R}} g(x)$. Ist f stetig differenzierbar, so auch g und es gilt für alle $\tilde{x}$, an dem das Supremum angenommen wird, dass $\nabla g(\tilde{x}) = 0$. Nun ist $\nabla g(\tilde{x}) = \nabla|_{\tilde{x}}(x^* x - f(x)) = x^* - \nabla f(\tilde{x})$ und somit $x^* = \nabla f(\tilde{x})$. Da f streng konvex ist, ist $\nabla f(\tilde{x})$ in allen Komponenten streng monoton steigend, somit ist $\tilde{x}$ durch die Bedingung eindeutig festgelegt und auch sicherlich ein Maximum.

(d) Geben Sie eine geometrische Interpretation der Legendre-transformierten Funktion f^* einer streng konvexen, differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Hinweis: Betrachten Sie dazu die Tangenten an dem Graphen der Funktion.*

Lösung: Betrachten wir den Graphen $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Für gegebenes $x^* \in \mathbb{R}$ nimmt die Legendre-Transformierte f^* den Wert des geringsten Abstandes in zwischen dem Graphen von f und der Gerade $x \mapsto x^* x$ mit Steigung x^* an. Wir wir im vorrausgegangenen Aufgabenteil gesehen haben, ist dieser Abstand gerade an dem Punkt $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ erreicht an dem die Steigung von f gerade x^* ist. Verschieben wir also die Gerade, um $f^*(x^*)$ in y-Richtung, erhalten wir die Tangente $x \mapsto x^* x + f^*(x^*)$ von f an der Stelle $\tilde{x}$. Mit anderen Worten gegeben eine Steigung x^* so gibt f^* den y-Achsenabschnitt der Tangente an f mit dieser Steigung an. Da f streng konvex ist wird jede Steigung nur an genauer einer Stelle angenommen. Der duale Graph $\{(x^*, f(x^a st))\}$ legt dadurch f ebenso eindeutig fest.

(e) Zeigen Sie, dass die Legendre-Transformation für stetig differenzierbare, strikt konvexe Funktionen eine Involution ist, d.h. es gilt $(f^*)^*(x) = f(x)$.

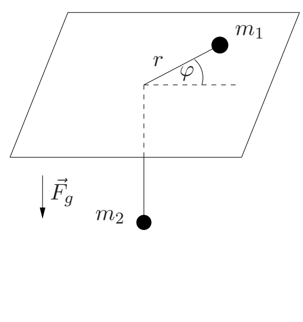
Lösung: Wir wissen, dass $f^*(x^*) = x^* \tilde{x} - f(\tilde{x})$ mit $x^* = \nabla f(\tilde{x})$ ist. Wenden wir nun wiederum die Legendre-Transformation an, so erhalten wir

$$(f^*)^*(x) = x \cdot \tilde{x}^* - \tilde{x}^* \cdot \tilde{x} + f(\tilde{x})$$

mit $x = \nabla_{x^*}|_{\tilde{x}^*}(x^* \cdot \tilde{x} - f(\tilde{x})) = \tilde{x}$. Einsetzen der Bedingung $\tilde{x} = x$ ergibt, dass $(f^*)^*(x) = f(x)$ ist.

Aufgabe 2: Verbundene Massen mit planarer Zwangsbedingung

Zwei Massen m_1 und m_2 sind durch einen Faden der Länge L verbunden, der durch ein Loch in einer horizontalen Fläche (der $(x$–$y)$-Ebene) verläuft. Die Masse m_1 gleitet reibungslos auf der horizontalen Fläche, während m_2 senkrecht nach unten hängt und sich nur in Richtung der Gravitationskraft bewegt.



Dieses System kann durch zwei verallgemeinerte Koordinaten beschrieben werden, die als Radial- und Winkelkoordinaten der ersten Masse gewählt werden können. Wenn wir $r := r_1$ und $\phi := \phi_1$ definieren und weiter annehmen, dass die beiden Massen gleich ($m_1 = m_2 = m$) sind, ist die Lagrangefunktion dieses Systems

$$L = m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - mgr\,.$$

(a) Geben Sie die zugehörige Hamiltonfunktion an.

Lösung: First, we need to find the generalized momenta as H should only depend on the generalized coordinates and generalized momenta:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 2m\dot{r}$$
$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}$$

The simplest way to solve this is to realise that, since the coordinates are all time-independent, in this situation the Hamiltonian should indeed be equal to the total energy and thus for this closed system $H = T + V$. Comparing that to the given L and identifying T and V, one finds:

$$H = \frac{p_r^2}{4m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + mgr$$

Alternatively, one can use the definition of the Hamiltonian directly:

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$$

and using the definitions of p_i to express the $\dot{q}_i$ in terms of $\boldsymbol{q}$ and $\boldsymbol{p}$.

(b) Wie lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen? Benutzen Sie diese, um die Bewegungsgleichungen für die kanonischen Koordinaten und Impulse dieses Systems aufzuschreiben.

Lösung: The hamiltonian equations of motion in general are given by:

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = +\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

These lead to the following equations of motion

$$\dot{p}_r = -mg + \frac{p_\phi^2}{mr^3} \tag{s.1}$$
$$\dot{r} = \frac{p_r}{2m} \tag{s.2}$$
$$\dot{p}_\phi = 0 \tag{s.3}$$
$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \tag{s.4}$$

(c) Ist die Hamiltonfunktion eine Erhaltungsgröße? Ist die Energie eine Erhaltungsgröße? Begründen Sie Ihre Antworten!

Lösung: The Hamiltonian has no explicit time dependence and so is a constant of motion. Because here the coordinates also do not depend on time, the Hamiltonian is the same as the total energy of the system. Thus the energy is also conserved. Alternatively, since the system is closed energy is also necessarily conserved.

(d) Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Klammer, dass der Drehimpuls der ersten Masse $p_\phi = mr^2\dot{\varphi}$ eine Erhaltungsgröße ist.

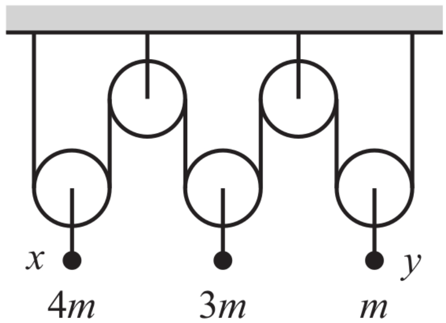
Lösung: We just need to compute the Poisson bracket between H and $mr^2\dot{\phi} = p_\phi$ since the angular momentum has no explicit time dependence.

$$\begin{aligned}
\{p_\phi \,,\, H\} &= \left\{p_\phi \,,\, \frac{p_r^2}{4m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + mgr\right\} \\
&= \frac{\partial p_\phi}{\partial r}\frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial p_\phi}{\partial p_r}\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial p_\phi}{\partial \phi}\frac{\partial H}{\partial p_\phi} - \frac{\partial p_\phi}{\partial p_\phi}\frac{\partial H}{\partial \phi} \\
&= 0 - 0 + 0 - 1 \times \frac{\partial H}{\partial \phi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

where we have used the fact that the generalised coordinates and momenta are independent variables ($\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0 \ \forall i,k$) and in the last line that we have already seen that $\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$.

Aufgabe 3: Eine andere Atwoodsche Fallmaschine

Betrachten Sie die Atwoodsche Fallmaschine in der folgenden Abbildung:



Die 3 Massen (von links nach rechts) sind $4m$, $3m$ und m. Es wirkt eine Gravitationskraft mit Gravitationsbeschleunigung g auf alle Masse. Die Bewegung der Massen erfolgt nur entlang der Richtung der Gravitationskraft. Die Rollen und Seile der Maschine können als masselos angenommen werden.

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion für dieses System auf.

Hinweis. Die Positionen der linken und rechten Masse sind geeignete verallgemeinerte Koordinaten.

Lösung: The coordinate of the center mass is constrained by the constant length of the string: If the left mass moves up by x and the right mass moves up by y, then the center mass has to move *down* by $x + y$. We get:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = T - V &= \frac{4m}{2}\dot{x}^2 + \frac{3m}{2}(-\dot{x} - \dot{y})^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 - g\left[4mx + 3m(-x-y) + my\right] \\
&= \frac{7}{2}m\dot{x}^2 + 3m\dot{x}\dot{y} + 2m\dot{y}^2 - mg(x - 2y)
\end{aligned}$$

(b) Neben der Energie hat dieses System noch eine andere Erhaltungsgröße, die wir nun berechnen wollen. Finden Sie hierzu eine kontinuierliche Transformation der verallgemeinerten Koordinaten, welche die Lagrangefunktion invariant lässt. Nutzen Sie das Noether-Theorem, um die dazugehörige Erhaltungsgröße zu berechnen.

Hinweis. *Gute Kandidaten für die Transformation sind solche, die Zeitableitung der einzelnen Koordinaten $\dot{q}_i$ überhaupt nicht verändern, und gleichzeitig den Potentialterm invariant lassen.*

Lösung: The complex dependencies on $\dot{x}$ and $\dot{y}$ should lead one to try transformations that do not affect $\dot{x}$ and $\dot{y}$ at all first - like the simple translations we have previously seen for momentum conservation. The potential energy term implies that such translations need to leave (x-2y) invariant as well. The following transformation works:

$$\begin{aligned} x(t,\alpha) &= x(t) + 2\alpha \\ y(t,\alpha) &= y(t) + \alpha \end{aligned}$$

According to Noether's theorem if the transformation leaves L invariant, the following quantity is conserved:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0}$$

In this case this yields:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0}}_{=2} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0}}_{=1} = m(7\dot{x} + 3\dot{y}) \times 2 + m(3\dot{x} + 4\dot{y}) \times 1 = m(17\dot{x} + 10\dot{y})$$

as the conserved quantity.