

Übungsblatt 11  
Hamiltonsche Mechanik und Poisson-Klammern

Abgabe bis: 09.07.2021 um 12:00 Uhr

---

**Aufgabe 1: Pendel im Phasenraum**

Betrachten Sie ein Pendel mit einer Masse  $m$ , die am Ende einer masselosen Stange mit konstanter Länge  $l$  angebracht ist und sich im Gravitationsfeld mit Gravitationsbeschleunigung  $g$  bewegt. Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta) , \quad (1)$$

wobei  $\theta$  der Winkel der Stange zur vertikalen Achse ist.

- (a) Berechnen Sie die Hamilton-Funktion. Was ist der zur Koordinate  $\theta$  gehörende kanonische Impuls  $p_\theta$ ?
- (b) Finden Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen und schreiben Sie diese in Matrixform

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (2)$$

wobei  $\mathbf{X} = (\theta, p_\theta)^T$  ein Punkt im Phasenraum ist und  $\mathbf{F}$  eine vektorwertige Funktion von  $\theta, p_\theta$  ist.

- (c) Finden Sie die Gleichgewichtspunkte  $\mathbf{X}$  im Phasenraum und entwickeln sie  $\mathbf{F}$  bis zur ersten Ordnung um jeden dieser Punkte. Schreiben Sie die so linearisierten Hamiltonschen Bewegungsgleichungen wiederum in Matrixform:

$$\dot{\mathbf{X}} = A \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_{eq}) \quad (3)$$

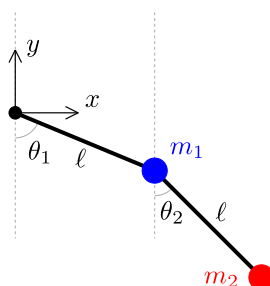
Finden Sie die also für jeden der Gleichgewichtspunkte jeweils die Matrix  $A$ ! Entscheiden Sie für jeden der Gleichgewichtspunkte, ob er stabil oder instabil ist.

**Aufgabe 2: Doppel-Pendel**

Betrachten Sie ein Pendel mit Masse  $m$  am Ende einer masselosen Stange mit Länge  $l$  und ein zweites identisches Pendel, welches am Ende des ersten angebracht ist. Das erste Pendel ist am Ursprung  $(0, 0)$  aufgehängt und beide Pendel bewegen sich nur in einer zweidimensionalen Ebene. Wir haben dieses System schon auf dem Übungsblatt 7 betrachtet. Dort hatten wir die folgenden Ausdrücke für die kinetische Energie  $T$  und potentielle Energie  $V$  dieses Systems gefunden:

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2(2\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))$$

$$V = -mg\ell(2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$



- (a) Schreiben Sie die Lagrange-Funktion in der folgenden Matrixform, d.h. finden Sie einen Ausdruck für die Matrix  $A$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} - V ;$$

- (b) Zeigen Sie, dass die verallgemeinerten Impulse durch

$$\begin{bmatrix} p_{\theta_1} \\ p_{\theta_2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

gegeben sind und zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion  $H$  gegeben ist durch

$$H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_{\theta_1} & p_{\theta_2} \end{bmatrix} A^{-1} \begin{bmatrix} p_{\theta_1} \\ p_{\theta_2} \end{bmatrix} + V . \quad (5)$$

- (c) Zeigen Sie, dass Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für die  $p_i$  gegeben sind durch (mit  $p_i$  kurz für  $p_{\theta_i}$ )

$$\frac{\partial H}{\partial p_{\theta_1}} = \frac{p_1 - p_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{m\ell^2(2 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} ; \quad \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_2}} = \frac{2p_2 - p_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{m\ell^2(2 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} ;$$

- (d) Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für die  $\theta_i$  gegeben sind durch (wobei im Folgenden  $x = \theta_1 - \theta_2$ ):

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = 2mg\ell \sin(\theta_1) + g(x, p_1, p_2) ; \quad \frac{\partial H}{\partial \theta_2} = mg\ell \sin(\theta_2) - g(x, p_1, p_2) ;$$

$$g(x, p_1, p_2) = \frac{1}{m\ell^2(2 - \cos^2(x))} \left[ p_1 p_2 \sin(x) - \frac{\sin(x) \cos(x)}{2 - \cos^2(x)} (p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(x)) \right] .$$

### Aufgabe 3: Poisson-Klammern

Wir betrachten Funktionen  $f(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N), g(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$  der generalisierten Koordinaten und Impulse. Deren Poisson-Klammer ist definiert als

$$\{f, g\} := \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \quad (6)$$

- (a) Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Poisson-Klammern:

$$\begin{aligned} \{f, f\} &= 0 \\ \{f, g\} &= -\{g, f\} \\ \{f, g + h\} &= \{f, g\} + \{f, h\} \end{aligned}$$

- (b) Zeigen Sie, dass die Poisson-Klammern der generalisierten Koordinaten  $q_i$  und dazugehörigen kanonischen Impulse  $p_j$  sich wie folgt für alle  $i, j \in \{1, \dots, N\}$  ergeben:

$$\begin{aligned} \{q_i, q_j\} &= 0 \\ \{p_i, p_j\} &= 0 \\ \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

- (c) Sei  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  ebenfalls eine Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und Impulse. Angenommen, dass  $F$  nicht explizit von der Zeit abhängt, zeigen Sie, dass  $F$  genau dann eine Erhaltungsgröße ist, wenn gilt das:

$$\{F, H\} = 0,$$

wobei  $H$  die Hamiltonfunktion ist.

- (d) Zeigen Sie, dass, wenn  $F$  und  $G$  Erhaltungsgrößen sind, auch ihre Poisson-Klammer  $\{F, G\}$  erhalten ist. Sie dürfen ohne Beweis die Jacobi-Identität für Poisson-Klammern

$$\{C, \{A, B\}\} + \{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0$$

benutzen. Diese kann durch eine einfache aber langwierige Rechnung bewiesen werden.