Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2022

Übungsblatt 11
Hamiltonsche Mechanik und Poisson-Klammern

Abgabe bis: 09.07.2021 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Pendel im Phasenraum

Betrachten Sie ein Pendel mit einer Masse m, die am Ende einer masselosen Stange mit konstanter Länge l angebracht ist und sich im Gravitationsfeld mit Gravitationsbeschleunigung g bewegt. Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)\ , \tag{1}$$

wobei θ der Winkel der Stange zur vertikalen Achse ist.

(a) Berechnen Sie die Hamilton-Funktion. Was ist der zur Koordinate θ gehörende kanonische Impuls p_θ?

(b) Finden Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen und schreiben Sie diese in Matrixform

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \tag{2}$$

wobei $\boldsymbol{X} = (\theta, p_\theta)^T$ ein Punkt im Phasenraum ist und $\boldsymbol{F}$ eine vektorwertige Funktion von θ, p_θ ist.

(c) Finden Sie die Gleichgewichtspunkte $\boldsymbol{X}$ im Phasenraum und entwickeln sie $\boldsymbol{F}$ bis zur ersten Ordnung um jeden dieser Punkte. Schreiben Sie die so linearisierten Hamiltonschen Bewegungsgleichungen wiederum in Matrixform:

$$\dot{\boldsymbol{X}} = A\cdot(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_{eq}) \tag{3}$$

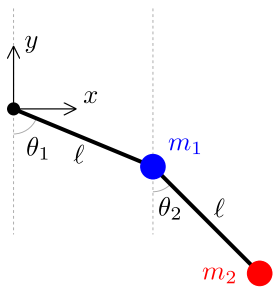
Finden Sie die also für jeden der Gleichgewichtspunkte jeweils die Matrix A! Entscheiden Sie für jeden der Gleichgewichtspunkte, ob er stabil oder instabil ist.

Aufgabe 2: Doppel-Pendel

Betrachten Sie ein Pendel mit Masse m am Ende einer masselosen Stange mit Länge ℓ und ein zweites identisches Pendel, welches am Ende des ersten angebracht ist. Das erste Pendel ist am Ursprung $(0,0)$ aufgehängt und beide Pendel bewegen sich nur in einer zweidimensionalen Ebene. Wir haben dieses System schon auf dem Übungsblatt 7 betrachtet. Dort hatten wir die folgenden Ausdrücke für die kinetische Energie T und potentielle Energie V dieses Systems gefunden:

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)))$$

$$V = -mg\ell(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$



(a) Schreiben Sie die Lagrange-Funktion in der folgenden Matrixform, d.h. finden Sie einen Ausdruck für die Matrix A:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot\theta_1 & \dot\theta_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \end{bmatrix} - V \ ;$$

(b) Zeigen Sie, dass die verallgemeinerten Impulse durch

$$\begin{bmatrix} p_{\theta_1} \\ p_{\theta_2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

gegeben sind und zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion H gegeben ist durch

$$H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_{\theta_1} & p_{\theta_2} \end{bmatrix} A^{-1} \begin{bmatrix} p_{\theta_1} \\ p_{\theta_2} \end{bmatrix} + V \ . \tag{5}$$

(c) Zeigen Sie, dass Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für die θ_i gegeben sind durch (mit p_i kurz für p_{θ_i})

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_1}} = \frac{p_1 - p_2\cos(\theta_1-\theta_2)}{m\ell^2(2-\cos^2(\theta_1-\theta_2))} \ ; \qquad \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_2}} = \frac{2p_2 - p_1\cos(\theta_1-\theta_2)}{m\ell^2(2-\cos^2(\theta_1-\theta_2))} \ ;$$

(d) Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für die θ_i gegeben sind durch (wobei im Folgenden $x = \theta_1 - \theta_2$):

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = 2mg\ell\sin(\theta_1) + g(x,p_1,p_2) \ ; \qquad \frac{\partial H}{\partial \theta_2} = mg\ell\sin(\theta_2) - g(x,p_1,p_2) \ ;$$

$$g(x,p_1,p_2) = \frac{1}{m\ell^2(2-\cos^2(x))}\left[p_1p_2\sin(x) - \frac{\sin(x)\cos(x)}{2-\cos^2(x)}\left(p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1p_2\cos(x)\right)\right] \ .$$

Aufgabe 3: Poisson-Klammern

Wir betrachten Funktionen $f(q_1,\ldots,q_N,p_1,\ldots,p_N), g(q_1,\ldots,q_N,p_1,\ldots,p_N)$ der generalisierten Koordinaten und Impulse. Deren Poisson-Klammer ist definiert als

$$\{f,g\} := \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}\right) \tag{6}$$

(a) Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Poisson-Klammern:

$$\begin{aligned} \{f,f\} &= 0 \\ \{f,g\} &= -\{g,f\} \\ \{f,g+h\} &= \{f,g\} + \{f,h\} \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Poisson-Klammern der generalisierten Koordinaten q_i und dazugehörenden kanonischen Impulse p_j sich wie folgt für alle $i,j \in \{1,\ldots,N\}$ ergeben:

$$\begin{aligned} \{q_i,q_j\} &= 0 \\ \{p_i,p_j\} &= 0 \\ \{q_i,p_j\} &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

(c) Sei $F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ ebenfalls eine Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und Impulse. Angenommen, dass F nicht explizit von der Zeit abhängt, zeigen Sie, dass F genau dann eine Erhaltungsgröße ist, wenn gilt das:

$$\{F, H\} = 0,$$

wobei H die Hamiltonfunktion ist.

(d) Zeigen Sie, dass, wenn F und G Erhaltungsgrößen sind, auch ihre Poisson-Klammer $\{F, G\}$ erhalten ist. Sie dürfen ohne Beweis die Jacobi-Identität für Poisson-Klammern

$$\{C, \{A, B\}\} + \{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0$$

benutzen. Diese kann durch eine einfache aber langwierige Rechnung bewiesen werden.