Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2022

Übungsblatt 11
Hamiltonsche Mechanik und Poisson-Klammern

Abgabe bis: 09.07.2021 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Pendel im Phasenraum

Betrachten Sie ein Pendel mit einer Masse m, die am Ende einer masselosen Stange mit konstanter Länge l angebracht ist und sich im Gravitationsfeld mit Gravitationsbeschleunigung g bewegt. Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)\ , \tag{1}$$

wobei θ der Winkel der Stange zur vertikalen Achse ist.

(a) Berechnen Sie die Hamilton-Funktion. Was ist der zur Koordinate θ gehörende kanonische Impuls p_θ?

Lösung: There is only one generalised coordinate, the angle θ. From the Lagrangian L we find the generalised momentum p_θ as

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \tag{s.1}$$

which is the angular momentum. The generalised velocity $\dot{\theta}$ can be expressed in terms of p_θ as $\dot{\theta} = p_\theta/ml^2$. The Hamiltonian $H(\theta, p_\theta)$ is defined as the Legendre transform of the Lagrangian $L(\theta, \dot{\theta})$ i.e.

$$H = p_\theta\,\dot{\theta}(p_\theta) - L = \frac{1}{2ml^2}p_\theta^2 + mgl(1-\cos\theta) \tag{s.2}$$

(b) Finden Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen und schreiben Sie diese in Matrixform

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \tag{2}$$

wobei $\boldsymbol{X} = (\theta, p_\theta)^T$ ein Punkt im Phasenraum ist und $\boldsymbol{F}$ eine vektorwertige Funktion von θ, p_θ ist.

Lösung:

Hamilton's equations give

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$
$$\dot{p_\theta} = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = -mgl\sin\theta$$

which can be written in the requested matrix form with

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} p_\theta/(ml^2) \\ -mgl\sin\theta \end{pmatrix} \tag{s.3}$$

(c) Finden Sie die Gleichgewichtspunkte $\boldsymbol{X}$ im Phasenraum und entwickeln sie $\boldsymbol{F}$ bis zur ersten Ordnung um jeden dieser Punkte. Schreiben Sie die so linearisierten Hamiltonschen Bewegungsgleichungen wiederum in Matrixform:

$$\dot{\boldsymbol{X}} = A \cdot (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_{eq}) \tag{3}$$

Finden Sie die also für jeden der Gleichgewichtspunkte jeweils die Matrix A! Entscheiden Sie für jeden der Gleichgewichtspunkte, ob er stabil oder instabil ist.

Lösung: Equilibrium points are those at which $\dot{\boldsymbol{X}} = 0$ i.e. the solutions of the equation $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_{eq}) = 0$. We get

$$p_\theta = 0 \text{ and } (\theta = 0 \text{ or } \theta = \pi) \tag{s.4}$$

therefore there are two equilibrium points, $\boldsymbol{X}_{eq}^{(1)} = (0,0)^T$ (pendulum at the bottom position with zero momentum) and $\boldsymbol{X}_{eq}^{(2)} = (\pi, 0)^T$ (pendulum at the top position with zero momentum).

By Taylor expanding $\boldsymbol{F}$ about an equilibrium point we get

$$\dot{X}_i = \sum_j \left. \frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right|_{X = X_{eq}} (X_j - X_{eq,j}) \tag{s.5}$$

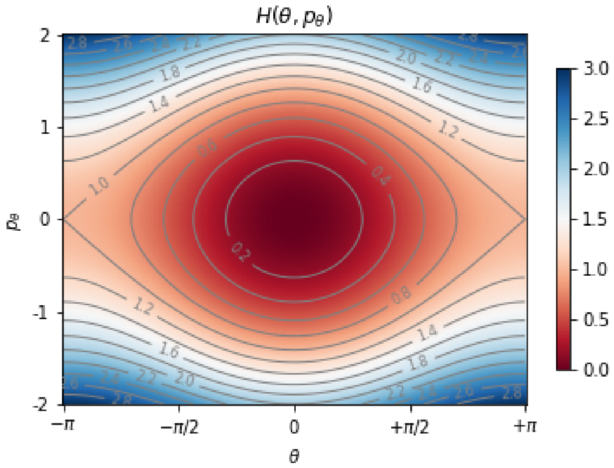
so the matrix A is $A_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right|_{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_{eq}}$. More explicitly: for the equilibrium point $\boldsymbol{X}_{eq}^{(1)}$

$$A^{(1)} = \left. \begin{pmatrix} \partial_\theta F_\theta & \partial_{p_\theta} F_\theta \\ \partial_\theta F_{p_\theta} & \partial_{p_\theta} F_{p_\theta} \end{pmatrix} \right|_{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_{eq}^{(1)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1/(ml^2) \\ -mgl & 0 \end{pmatrix} \tag{s.6}$$

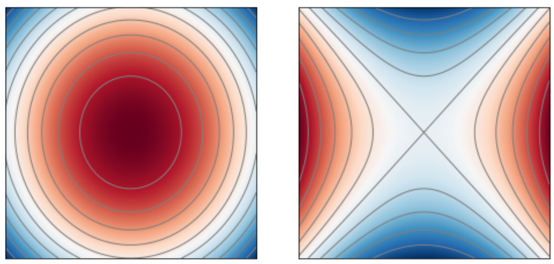
and similarly for the equilibrium point $\boldsymbol{X}_{eq}^{(1)}$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1/(ml^2) \\ mgl & 0 \end{pmatrix} \tag{s.7}$$

To study the stability of the equilibrium points, formally, one should now compute the eigenvalues of $A^{(1)}, A^{(2)}$. Then, in the mathematical field that studies *dynamical systems*, in particular *stability theory*, there exist conditions on whether equilibrium points are stable or unstable based on the real parts of the eigenvalues. Certain types of equilibrium points also come with typical phase space diagrams, some examples of which are depicted below for the case of the pendulum. Here, we do not need to go into that much detail. For our purposes, it suffices to note that for the point $\boldsymbol{X}_{eq}^{(1)}$, any small displacement out of this equilibrium point results in a net force in the direction opposite to the displacement direction. Hence, this point is stable. On the other hand, for the point $\boldsymbol{X}_{eq}^{(2)}$, a small displacement out of this equilibrium point results in a net force in the same direction as the displacement direction. Hence, here the system is immediately driven away from the equilibrium making this an unstable equilibrium.



The above image shows the phase space plot of the pendulum. The stable equilibrium point is in the center at $(0, 0)$ whereas the instable equilibrium point can be found at either side. The images below zoom in to these regions of phase space. In particular, the left image shows the region around the stable equilibrium. One can see a so-called *center*. The right image shows the region around the unstable equilibrium. Here, one can see a so called *saddle point*.

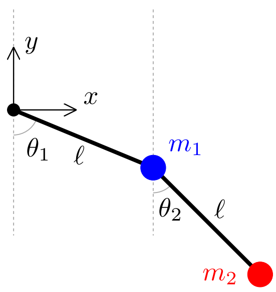


Aufgabe 2: Doppel-Pendel

Betrachten Sie ein Pendel mit Masse m am Ende einer masselosen Stange mit Länge ℓ und ein zweites identisches Pendel, welches am Ende des ersten angebracht ist. Das erste Pendel ist am Ursprung $(0, 0)$ aufgehängt und beide Pendel bewegen sich nur in einer zweidimensionalen Ebene. Wir haben dieses System schon auf dem Übungsblatt 7 betrachtet. Dort hatten wir die folgenden Ausdrücke für die kinetische Energie T und potentielle Energie V dieses Systems gefunden:

$$T = \frac{1}{2} m\ell^2 (2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)))$$

$$V = -mg\ell(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$



(a) Schreiben Sie die Lagrange-Funktion in der folgenden Matrixform, d.h. finden Sie einen Ausdruck für die Matrix A:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot\theta_1 & \dot\theta_2\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}\dot\theta_1 \\ \dot\theta_2\end{bmatrix} - V \ ;$$

(b) Zeigen Sie, dass die verallgemeinerten Impulse durch

$$\begin{bmatrix}p_{\theta_1} \\ p_{\theta_2}\end{bmatrix} = A \begin{bmatrix}\dot\theta_1 \\ \dot\theta_2\end{bmatrix} \tag{4}$$

gegeben sind und zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion H gegeben ist durch

$$H = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}p_{\theta_1} & p_{\theta_2}\end{bmatrix} A^{-1} \begin{bmatrix}p_{\theta_1} \\ p_{\theta_2}\end{bmatrix} + V \ . \tag{5}$$

(c) Zeigen Sie, dass Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für die θ_i gegeben sind durch (mit p_i kurz für p_{θ_i})

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_1}} = \frac{p_1 - p_2\cos(\theta_1-\theta_2)}{m\ell^2(2-\cos^2(\theta_1-\theta_2))} \ ; \qquad \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_2}} = \frac{2p_2 - p_1\cos(\theta_1-\theta_2)}{m\ell^2(2-\cos^2(\theta_1-\theta_2))} \ ;$$

(d) Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für die θ_i gegeben sind durch (wobei im Folgenden $x = \theta_1 - \theta_2$):

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = 2mg\ell\sin(\theta_1) + g(x,p_1,p_2) \ ; \qquad \frac{\partial H}{\partial \theta_2} = mg\ell\sin(\theta_2) - g(x,p_1,p_2) \ ;$$

$$g(x,p_1,p_2) = \frac{1}{m\ell^2(2-\cos^2(x))}\left[p_1p_2\sin(x) - \frac{\sin(x)\cos(x)}{2-\cos^2(x)}\left(p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1p_2\cos(x)\right)\right] \ .$$

Lösung: Die Lösungen befinden sich auf den folgenden Seiten.

[Typo on exercise sheet: There was an erroneous factor of 2 in the expression for T in the sheet that was distributed to you.]

Double pendulum - solutions.

a) The masses have positions (x_1, y_1) and (x_2, y_2) given by

$$x_1 = l\sin\vartheta_1 \longrightarrow \dot{x}_1 = l\dot{\vartheta}_1\cos\vartheta_1$$
$$y_1 = -l\cos\vartheta_1 \longrightarrow \dot{y}_1 = l\dot{\vartheta}_1\sin\vartheta_1$$

$$x_2 = l\sin\vartheta_1 + l\sin\vartheta_2 \longrightarrow \dot{x}_2 = l\dot{\vartheta}_1\cos\vartheta_1 + l\dot{\vartheta}_2\cos\vartheta_2$$
$$y_2 = -l\cos\vartheta_1 - l\cos\vartheta_2 \longrightarrow \dot{y}_2 = l\dot{\vartheta}_1\sin\vartheta_1 + l\dot{\vartheta}_2\sin\vartheta_2$$

Then $\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l^2\dot{\vartheta}_1^2$ and $\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l^2(\dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_2^2 + 2\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2))$

The potential is $V = mgy_1 + mgy_2 = -mgl(2\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2)$

$$\rightarrow L = \frac{1}{2}ml^2\underbrace{\left(2\dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_2^2 + 2\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)\right)}_{= [\dot{\vartheta}_1 \ \dot{\vartheta}_2]\begin{bmatrix} 2 & \cos(\vartheta_1-\vartheta_2) \\ \cos(\vartheta_1-\vartheta_2) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2\end{bmatrix}} - V$$

b) We have

$$\left.\begin{aligned} p_{\vartheta_1} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_1} = ml^2(2\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)) \\ p_{\vartheta_2} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_2} = ml^2(\dot{\vartheta}_2 + \dot{\vartheta}_1\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} p_{\vartheta_1} \\ p_{\vartheta_2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{bmatrix}.$$

This can also be seen directly from the fact that the derivative of a product of matrices is $\frac{\partial}{\partial x}(AB) = \frac{\partial A}{\partial x} B + A \frac{\partial B}{\partial x}$, and thus

$$\frac{\partial}{\partial \dot\vartheta_1}\left(\begin{bmatrix}\dot\vartheta_1 & \dot\vartheta_2\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}\dot\vartheta_1 \\ \dot\vartheta_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}\dot\vartheta_1 \\ \dot\vartheta_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dot\vartheta_1 & \dot\vartheta_2\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix},$$

along with the fact that A is symmetric.

The Hamiltonian is then given by

$$H = \begin{bmatrix}p_{\vartheta_1} & p_{\vartheta_2}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\dot\vartheta_1 \\ \dot\vartheta_2\end{bmatrix} - L \qquad \begin{bmatrix}\dot\vartheta_1 \\ \dot\vartheta_2\end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix}p_{\vartheta_1} \\ p_{\vartheta_2}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}p_{\vartheta_1} & p_{\vartheta_2}\end{bmatrix} A^{-1} \begin{bmatrix}p_{\vartheta_1} \\ p_{\vartheta_2}\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}p_{\vartheta_1} & p_{\vartheta_2}\end{bmatrix} \underbrace{A^{-1} A A^{-1}}_{= A^{-1}} \begin{bmatrix}p_{\vartheta_1} \\ p_{\vartheta_2}\end{bmatrix} + V$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}p_{\vartheta_1} & p_{\vartheta_2}\end{bmatrix} A^{-1} \begin{bmatrix}p_{\vartheta_1} \\ p_{\vartheta_2}\end{bmatrix} + V \quad .$$

c) $H = \frac{1}{2}(p_{\vartheta_1} \;\; p_{\vartheta_2}) A^{-1} \begin{pmatrix} p_{\vartheta_1} \\ p_{\vartheta_2} \end{pmatrix} + V$ $\qquad A = ml^2 \begin{pmatrix} 2 & \cos(\vartheta_1-\vartheta_2) \\ \cos(\vartheta_1-\vartheta_2) & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{ml^2} \cdot \frac{1}{2-\cos^2(\vartheta_1-\vartheta_2)} \begin{bmatrix} 1 & -\cos(\vartheta_1-\vartheta_2) \\ -\cos(\vartheta_1-\vartheta_2) & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{\frac{\partial H}{\partial p_{\vartheta_1}}} = \frac{1}{2}(1 \;\; 0) A^{-1} \begin{pmatrix} p_{\vartheta_1} \\ p_{\vartheta_2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(p_{\vartheta_1} \;\; p_{\vartheta_2}) A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \;\; 0) A^{-1} \begin{pmatrix} p_{\vartheta_1} \\ p_{\vartheta_2} \end{pmatrix} \qquad \partial \;\; A^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$= \underline{\frac{1}{ml^2(2-\cos^2(\vartheta_1-\vartheta_2))}\left(p_{\vartheta_1} - p_{\vartheta_2}\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)\right)}$$

& From the Hamiltonian equations of motion we have $\underline{\frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{\vartheta_1}}}$.

Similarly $\frac{\partial H}{\partial p_{\vartheta_2}} = (0 \;\; 1) A^{-1} \begin{pmatrix} p_{\vartheta_1} \\ p_{\vartheta_2} \end{pmatrix}$

$$= \underline{\frac{1}{ml^2(2-\cos^2(\vartheta_1-\vartheta_2))}\left(-p_{\vartheta_1}\cos(\vartheta_1-\vartheta_2) + 2p_{\vartheta_2}\right)}$$

and $\underline{\frac{d\vartheta_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{\vartheta_2}}}$

d) We first compute $\frac{\partial A^{-1}}{\partial \vartheta_1}$:

$$\frac{\partial A^{-1}}{\partial \vartheta_1} = \frac{1}{ml^2}\left(-\frac{1}{[2-\cos^2(\vartheta_1-\vartheta_2)]^2}\right)(-2\cos(\vartheta_1-\vartheta_2))(-\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)) \begin{bmatrix} 1 & -\cos(\vartheta_1-\vartheta_2) \\ -\cos(\vartheta_1-\vartheta_2) & 2 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{ml^2} \cdot \frac{1}{2-\cos^2(\vartheta_1-\vartheta_2)} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \sin(\vartheta_1-\vartheta_2) \\ \sin(\vartheta_1-\vartheta_2) & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$= \frac{1}{ml^2(2-\cos^2(\vartheta_1-\vartheta_2))} \left(\frac{-2\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)}{2-\cos^2(\vartheta_1-\vartheta_2)} \begin{bmatrix} 1 & -\cos(\vartheta_1-\vartheta_2) \\ -\cos(\vartheta_1-\vartheta_2) & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sin(\vartheta_1-\vartheta_2) \\ \sin(\vartheta_1-\vartheta_2) & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Then

$$\underline{\frac{\partial H}{\partial \vartheta_1}} = \frac{1}{2} (p_{\vartheta_1} \;\; p_{\vartheta_2}) \frac{\partial A^{-1}}{\partial \vartheta_1} \begin{pmatrix} p_{\vartheta_1} \\ p_{\vartheta_2} \end{pmatrix} + \overbrace{\frac{\partial V}{\partial \vartheta_1}}^{= 2mgl\sin(\vartheta_1)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{ml^2(2-\cos^2(\vartheta_1-\vartheta_2))} \left(\frac{-2\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)}{2-\cos^2(\vartheta_1-\vartheta_2)} \left(p_{\vartheta_1}^2 + 2p_{\vartheta_2}^2 - 2p_{\vartheta_1}p_{\vartheta_2}\cos(\vartheta_1-\vartheta_2) \right) + 2\sin(\vartheta_1-\vartheta_2) \cdot p_{\vartheta_1}p_{\vartheta_2} \right)$$

$$+ 2mgl\sin(\vartheta_1)$$

$$= \underline{2mgl\sin(\vartheta_1) + g(x, p_{\vartheta_1}, p_{\vartheta_2})} \qquad \text{with } x = \vartheta_1 - \vartheta_2$$

$$\text{with } \underline{g(x, p_1, p_2) = \frac{1}{ml^2(2-\cos^2(x))} \left(\frac{-\sin(x)\cos(x)}{2-\cos^2(x)} \left(p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1p_2\cos(x) \right) + \sin(x) \cdot p_1 p_2 \right)}$$

Now we compute $\frac{\partial H}{\partial \vartheta_2}$. We see that $\frac{\partial A^{-1}}{\partial \vartheta_2} = -\frac{\partial A^{-1}}{\partial \vartheta_1}$ because of the symmetric role played by ϑ_1, ϑ_2 in the expression for A^{-1}. (Better: we could have written A^{-1} in terms of x, then computed $\frac{\partial A^{-1}}{\partial x}$, then written $\frac{\partial A^{-1}}{\partial \vartheta_i} = \frac{\partial A^{-1}}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \vartheta_i}}_{=\pm 1}$ with $x = \vartheta_1 - \vartheta_2$.)

$$\text{Then } \frac{\partial H}{\partial \vartheta_2} = \frac{1}{2} (p_{\vartheta_1} \;\; p_{\vartheta_2}) \underbrace{\frac{\partial A^{-1}}{\partial \vartheta_2}}_{= -\frac{\partial A^{-1}}{\partial \vartheta_1}} \begin{pmatrix} p_{\vartheta_1} \\ p_{\vartheta_2} \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \vartheta_2}}_{= mgl\sin(\vartheta_2)}$$

$$= \underline{mgl\sin(\vartheta_2) - g(x, p_{\vartheta_1}, p_{\vartheta_2})} \qquad \text{with } x = \vartheta_1 - \vartheta_2 \text{ and } g(x, p_{\vartheta_1}, p_{\vartheta_2})$$

as above.

Aufgabe 3: Poisson-Klammern

Wir betrachten Funktionen $f(q_1,\ldots,q_N,p_1,\ldots,p_N), g(q_1,\ldots,q_N,p_1,\ldots,p_N)$ der generalisierten Koordinaten und Impulse. Deren Poisson-Klammer ist definiert als

$$\{f,g\} := \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}\right) \tag{6}$$

(a) Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Poisson-Klammern:

$$\begin{aligned}\{f,f\} &= 0\\ \{f,g\} &= -\{g,f\}\\ \{f,g+h\} &= \{f,g\}+\{f,h\}\end{aligned}$$

Lösung: Wir haben

$$\{f,f\} = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k}\right) = 0 \tag{s.8}$$

$$\{f,g\} = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}\right) = -\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k}\right) = -\{g,f\} \tag{s.9}$$

und weiterhin

$$\{f,g+h\} = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial (g+h)}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial (g+h)}{\partial q_k}\right) \tag{s.10}$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} + \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial h}{\partial q_k}\right) \tag{s.11}$$

$$= \{f,g\}+\{f,h\} \tag{s.12}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Poisson-Klammern der generalisierten Koordinaten q_i und dazugehörenden kanonischen Impulse p_j sich wie folgt für alle $i,j \in \{1,\ldots,N\}$ ergeben:

$$\begin{aligned}\{q_i,q_j\} &= 0\\ \{p_i,p_j\} &= 0\\ \{q_i,p_j\} &= \delta_{ij}\end{aligned}$$

Lösung: Wir berechnen:

$$\{q_i,q_j\} = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q_k}\right) \tag{s.13}$$

$$= \sum_{k=1}^{N}(0+0) \tag{s.14}$$

wo wir benutzt haben, dass $\frac{\partial q_j}{\partial p_k} = 0$ für beliebige j,k. Analog können wir zeigen, dass $\{p_i,p_j\} = 0$, indem wir bemerken, dass $\frac{\partial p_j}{\partial q_k} = 0$ für beliebige j,k.

Um die dritte Relation zu zeigen, also $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$, rechnen wir, wie folgt:

$$\{q_i, p_j\} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) \tag{s.15}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (\delta_{ik}\delta_{jk} + 0) \tag{s.16}$$

$$= \delta_{ij} \tag{s.17}$$

(c) Sei $F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ ebenfalls eine Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und Impulse. Angenommen, dass F nicht explizit von der Zeit abhängt, zeigen Sie, dass F genau dann eine Erhaltungsgröße ist, wenn gilt das:

$$\{F, H\} = 0,$$

wobei H die Hamiltonfunktion ist.

Lösung: Die Funktion F ist eine Erhaltungsgröße, wenn gilt $\frac{d}{dt}F = 0$. Wir berechnen also die Zeitableitung von F. Dazu benutzen wir die Kettenregel und finden

$$\frac{d}{dt}F(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t)) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k}\dot{p}_k \right) \tag{s.18}$$

Hier haben wir benutzt, dass F nicht explizit von der Zeit abhängt, also $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$. Nun benutzen wir die Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \tag{s.19}$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \tag{s.20}$$

und setzen diese oben ein. Wir erhalten

$$\frac{d}{dt}F(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t)) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = \{F, H\} \tag{s.21}$$

Wir folgern, dass F eine Erhaltungsgröße ist, genau dann, wenn $\{F, H\} = 0$.

(d) Zeigen Sie, dass, wenn F und G Erhaltungsgrößen sind, auch ihre Poisson-Klammer $\{F, G\}$ erhalten ist. Sie dürfen ohne Beweis die Jacobi-Identität für Poisson-Klammern

$$\{C, \{A, B\}\} + \{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0$$

benutzen. Diese kann durch eine einfache aber langwierige Rechnung bewiesen werden.

Lösung: Nach Annahme sind F, G erhalten, sodass

$$\{F, H\} = 0 \tag{s.22}$$

$$\{G, H\} = 0 \tag{s.23}$$

Jetzt haben wir für die Poisson-Klammer $\{F, G\}$

$$\{\{F, G\}, H\} = -\{H, \{F, G\}\} = \{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0 \tag{s.24}$$

wo wir die Jakobi-Identität benutzt haben. Nach c) folgt nun aus $\{\{F, G\}, H\} = 0$, dass auch $\{F, G\}$ erhalten ist.