Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2022

Übungsblatt 12
Kanonische Transformationen

Abgabe bis: 15.07.2022 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Kanonische Transformationen und Satz von Liouville

Betrachten Sie die Hamiltonfunktion eines harmonischen Oszillators:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2. \tag{1}$$

(a) Definieren Sie neue Koordinaten Q und P:

$$Q = q\sqrt{\omega} \quad , \quad P = p/\sqrt{\omega} \tag{2}$$

und zeigen Sie, dass dies eine kanonische Transformation ist.

(b) Schreiben Sie die Hamiltonfunktion als Funktion von Q und P um. Stellen Sie die hamiltonschen Bewegungsgleichunen auf und lösen Sie das Gleichungssystem für allgemeine Anfangsbedingungen $Q(0) = Q_0$ und $P(0) = P_0$.

(c) Betrachten Sie ein Rechteck $ABCD$ im Phasenraum mit Eckpunkten $(Q_A, P_A) = (1, 0)$, $(Q_B, P_B) = (2, 0)$, $(Q_C, P_C) = (2, 1)$ und $(Q_D, P_D) = (1, 1)$. Finden Sie die Abbildung des Rechtecks zu einem späteren Zeitpunkt t. *Hinweis: Zeigen Sie, dass in den neuen Koordinaten, die Zeitentwicklung im Phasenraum einer Rotation um den Ursprung entspricht.* Zeigen Sie, dass die Fläche des Rechtecks durch die Zeitentwicklung nicht verändert wird und erkären Sie, warum das aufgrund des Satzes von Liouville auch im Allgemeinen zu erwarten ist. Wäre das immer noch der Fall, wenn ω in (1) eine zeitabhängige Funktion wäre?

Aufgabe 2: Kanonische Transformationen

Wir betrachten ein System beschrieben durch die Hamiltonfunktion:

$$H = \frac{1}{2}p^2 q^4 + \frac{1}{2}\frac{1}{q^2}. \tag{3}$$

Für Konstanten $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, A \neq 0$ und γ führen wir die folgende Koordinatentransformation durch:

$$q = P^\alpha, \qquad p = AQ^\beta P^\gamma. \tag{4}$$

(a) Bestimmen Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen für $\dot{q}$ und $\dot{p}$. Drücken sie diese durch $Q, P, \dot{Q}$ und $\dot{P}$ aus und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für Q und P.

(b) Betrachten Sie den neuen Hamiltonian $H'(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P))$ und bestimmen Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen für Q und P.

(c) Vergleichen Sie die Ergebnisse von a) und b). Was muss für α, β, γ, A gelten, damit die Bewegungsgleichungen erhalten bleiben, d.h. damit die Koordinatentransformation kanonisch ist.

(d) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $F(q, Q)$ für die Koordinatentransformation.

(e) Berechnen Sie die Poissonklammer $\{Q, P\}_{q,p}$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit den Bedingungen aus Aufgabe c).