1 Das Stern-Gerlach Experiment: Ein 3D Kinoerlebnis (5pt)

In dieser Übungsaufgabe schauen wir uns das Stern-Gerlach Experiment aus der Vorlesung genauer an, doch ersetzen wir den Strahl von Silberatomen mit sichtbarem Licht. Das elektrische Feld eines Lichtstrahls, welches in z-Richtung propagiert mit Frequenz ω, Impuls k und polarisiert ist in $\boldsymbol{e}_x$ oder $\boldsymbol{e}_y$ Richtung, kann beschrieben werden über die Fundamentallösungen für die elektrischen Felder, welche wir auf die Einheit $|\boldsymbol{E}|^2 = 1$ normieren.

$$\boldsymbol{E}_{x/y}\,(z,t) = \boldsymbol{e}_{x/y} e^{i(kz-\omega t)}. \tag{1.1}$$

(a) Betrachte eine Kinozuschauerin, welche eine 3D Brille mit Polaroidfilter entlang $\boldsymbol{e}_x$ bzw. $\boldsymbol{e}_y$- polarisiertes Licht auf dem linken bzw. rechten Auge trägt und auf der Position $z_0, |z_0| \gg 5$cm sitzt. Wie muss das elektrische Feld des Filmes aussehen, damit die Zuschauerin die elektrischen Felder $a(t)$ auf dem linken Auge und $b(t)$ auf dem rechten Auge, normiert auf $|a(t)|^2 + |b(t)|^2 = 1$, wahrnimmt? **[1pt]**

(b) Was passiert, wenn die Zuschauerin eines ihrer Augen zuhält? Was hat dies mit dem Wellenfunktionskollaps zu tun (diskutiert mir euren Kommiliton*innen). **[1pt]**

(c) Welche Quantenmessung wird ausgeführt, wenn die Zuschauerin mit einem geschlossenen Auge den Film mit $\phi = \pi/4$ gedrehtem Kopf betrachtet? **[1pt]**

(d) Wie lautet die Formulierung des obigen Experimentes mithilfe des *bra-ket* Formalismus, den ihr in der Vorlesung kennengelernt habt? Erklärt den mathematischen Zusammenhang zum Stern-Gerlach Experiment. **[2pt]**

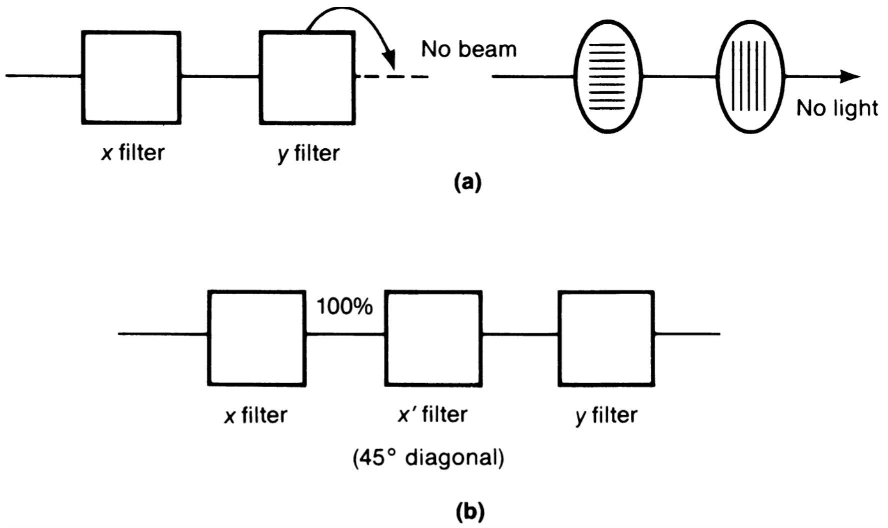

Figure 1: Darstellung aus Ref. [Sakurai, J. J., & Napolitano, J. Modern Quantum Mechanics (2020).]

2 Frühe Experimente der Quantenphysik (5pt)

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit grundlegenden Berechnungen, die von wichtigen Experimenten aus den Anfängen der Quantenphysik inspiriert sind. Diese Experimente zeigten, dass klassische Vorstellungen von Wellen und Teilchen nicht ausreichen, um das Verhalten von Quantenobjekten vollständig zu beschreiben.

(a) In einem Doppelspaltexperiment, bei dem die Spalten durch einen Abstand d voneinander getrennt sind, interferieren die Lichtwellen aus den beiden Spalten miteinander. Die Bedingung für konstruktive Interferenz, bei der helle Streifen auf dem Detektionsschirm gemessen werden, lautet:

$$d \sin \theta = m\lambda \tag{2.1}$$

wobei $m \in \mathbb{N}$, λ die Wellenlänge des Lichts und θ ein Winkel ist. Erklären Sie anhand einer Skizze, warum dies die Bedingung für konstruktive Interferenz ist. Hinweis: Es können Näherungen für kleine Winkel verwendet werden, da wir annehmen, dass L viel größer ist als die Breite der Spalten und ihr Abstand d. **[2pt]**

(b) Eine Lichtquelle mit der Wellenlänge $\lambda = 650$nm wird in einem Doppelspaltexperiment verwendet. Der Schirm befindet sich in einer Entfernung von $L = 2$m von den Spalten. Der Abstand zwischen benachbarten Maxima auf dem Schirm wird mit $\Delta x = 1$cm gemessen. Berechne den Spaltabstand d. **[1pt]**

(c) Nehmen wir an, Elektronen werden anstelle von Licht auf die Doppelspalte geschossen. Laut de Broglie besitzen auch Materieteilchen wie Elektronen eine ihnen zugeordnete Wellenlänge. Berechne die Geschwindigkeit v der Elektronen, die dieselbe Wellenlänge ($\lambda = 650$nm) wie das in (b) verwendete Licht haben. **[1pt]**

(d) Betrachte ein Experiment, bei dem Elektronen durch den Photoeffekt von einer Metalloberfläche emittiert werden, wenn diese mit Licht der Wellenlänge $\lambda_0 = 310$nm bestrahlt wird. Bei längeren Wellenlängen werden keine Elektronen emittiert. Berechne die minimale Frequenz ν_i des einfallenden Lichts, sodass die emittierten Elektronen eine de-Broglie-Wellenlänge von $\lambda = 650$nm haben. **[1pt]**

3 Gaußsche Integrale, ein universelles Werkzeug (5pt)

Viele quantenmechanische Probleme werden lösbar, indem man sie auf das Auswerten eines Gaußschen Integrales reduzieren kann. Diese Methode findet Anwendung in weiten Teilen der Physik, angefangen bei der Beschreibung simpler Systeme wie dem harmonischen Oszillator, dem Wasserstoffatom bis hin zu Quantenfeldtheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie und Quantengravitation. Die folgende Aufgabe hat das Ziel, euch mit dem Lösen solcher Gaußscher Integrale vertraut zu machen.
Löst die folgenden Integrale, wobei ihr annehmen könnt, dass

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \tag{3.1}$$

gilt.

(a)

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} \quad \textbf{[1pt]} \tag{3.2}$$

(b)

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+bx+c} \quad \textbf{[2pt]} \tag{3.3}$$

(c) Sei $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ ein n-dimensionaler Vektor und A eine symmetrische, positiv definite Matrix. [1] Löse das Integral

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} d^n x e^{-\mathbf{x}^T A \mathbf{x}} \tag{3.4}$$

und schreibe das Ergebnis mithilfe der Determinante von A.
Tipp: A ist diagonalisierbar. **[2pt]**

Crashkurs - Mehrdimensionale Integrale: Falls dies noch aus der Analysis unbekannt ist, im oberen Fall c) kann man das Integral iterativ lösen. $\int_{-\infty}^{\infty} d^n x$ ist eine kurze Schreibweise für $\int_{\infty}^{\infty} dx_1 \int_{\infty}^{\infty} dx_2 \ldots \int_{\infty}^{\infty} dx_n$, und "iterativ" bedeutet, dass man die Integrale nacheinander ausführen kann, wie z.B.

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy x^2 y = \int_0^1 dx x^2 \int_0^1 dy y = \int_0^1 dx \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{6}. \tag{3.5}$$

Substition in solchen höherdimensional Integralen funktioniert wie folgt in dem für uns relevanten Fall: Wenn man ein Integral der Form

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d^n x f(\mathbf{x}) \tag{3.6}$$

hat und die Substitution $\mathbf{x} = O\mathbf{y}$ durchführt, wobei O eine orthogonale Matrix ist ($O^T O = OO^T = I$), dann gilt

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d^n y f(O\mathbf{y}). \tag{3.7}$$

[1] Die heißt, dass alle Eigenwerte von A positiv sind.

4 Eigenwerte ohne Matrizen? (5pt)

(a) Wir betrachten den Hilbertraum der quadrat-summierbaren Folgen l_2:

$$l_2 = \left\{ x = (x_n)_{n=0}^{\infty}, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty, (a,b) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* b_n \right\}. \tag{4.1}$$

Ist l_2 ein endlich-dimensionaler Vektorraum? (**[0,5pt]**

(b) Physikalische Observablen werden durch selbstadjungierte lineare Operatoren aufgefasst. Das Spektrum $\sigma(A)$ eines solchen Operators beschreibt die Menge aller möglichen Messwerte von A. Im endlichdimensionalen Fall ist $\sigma(A)$ genau die Eigenwerte von A. Im unendlichdimensionalen Fall ist dies nicht mehr zwingend der Fall.
$\lambda \in \sigma(A) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \psi_\varepsilon \in \mathcal{H}, \; (\|\psi_\varepsilon\| = 1)$ s.t. $\|(A-\lambda)\psi_\varepsilon\| < \varepsilon, \iff$ $\{\lambda \in \mathbb{C}, (A - \lambda\mathbf{I})$ hat keine beschränkte Inverse $\}$.
Sei nun $S : l_2 \to l_2$, die Abbildung:

$$S : (x_0, x_1, ..) \to (0, x_0, x_1, ...). \tag{4.2}$$

Zeige S besitzt keine Eigenwerte. **[0,5pt]**

(c) Das Spektrum von S ist allerdings nicht leer. Zeige, dass $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ gilt, dass:

$$\lambda > \|A\| \implies \lambda \notin \sigma(A), \quad \|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{4.3}$$

[0,5pt]
Hinweis: Benutze (ohne zu zeigen), dass für $\lambda > \|A\|$ gilt:

$$(\lambda - A)^{-1} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{\lambda} \left(1 + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{A}{\lambda} \right)^k \right) \tag{4.4}$$

(d) Zeige, dass $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen ist. **[1,5pt]**
Hinweis: Benutze, dass die Menge der linearen Abbildungen mit beschränkter Inverse offen ist.

(e) Nehme an, es existiert eine zu A adjungierte lineare Abbildung, also, dass $(Ax, y) = (x, A^\dagger y) \; \forall x, y \in \mathcal{H}$ ist. Zeige:

$$\sigma(A^\dagger) = \{\lambda^* \in \mathbb{C}, \lambda \in \sigma(A)\} \tag{4.5}$$

[0,5pt]

(f) Nun kehren wir zu dem Beispiel zurück. Die Abbildung $S^\dagger : (x_0, x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, ...)$ ist die zu S adjungierte lineare Abbildung. Zeige:

$$\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1 \implies \lambda \in \sigma(S^\dagger). \tag{4.6}$$

[0,5pt]

(g) Bestimme mithilfe von (c)-(f): $\sigma(S)$. **[1pt]**

5 Einsteins Lösung der "Ultraviolett-Katastrophe" (5pt)

In der Vorlesung haben wir die sogenannte "Ultraviolett-Katastrophe" kennengelernt: das Versagen der klassischen Physik, das Spektrum der Schwarzkörperstrahlung zu erklären. Laut dem klassischen Rayleigh-Jeans-Gesetz divergiert die Energiedichte der Strahlung für kleine Wellenlängen:

$$e_{\mathrm{RJ}}(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B T. \tag{5.1}$$

Max Planck gelang es 1900 mit seinem Strahlungsgesetz, das Spektrum für alle Wellenlängen korrekt zu beschreiben:

$$e_{\mathrm{P}}(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1}. \tag{5.2}$$

Innerhalb der klassischen Physik lässt sich das Gesetz allerdings nicht erklären. In dieser Aufgabe schauen wir uns genauer an, wie Albert Einstein 1905 die Erklärung geliefert und damit einen Grundstein der Quantenmechanik gelegt hat.

(a) Zuerst leiten wir das Rayleigh-Jeans-Gesetz her. Dafür drücken wir die spektrale Energiedichte $e(\omega)$ allgemein als Produkt aus der spektralen Modendichte $n(\omega)$ und der mittleren Energie pro Mode $\bar{E}$ aus:

$$e(\omega) = n(\omega)\bar{E}. \tag{5.3}$$

Wir nehmen ohne Herleitung an, dass

- die spektrale Modendichte durch

$$n(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \tag{5.4}$$

gegeben ist, und

- die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mode Energie E hat, der Boltzmann-Verteilung

$$p(E) = \frac{e^{-E/(k_B T)}}{\int_0^\infty e^{-E/(k_B T)} \mathrm{d}E} \tag{5.5}$$

folgt.

Berechne die mittlere Energie $\bar{E} = \int_0^\infty Ep(E)\mathrm{d}E$ und vervollständige damit die Herleitung. **[2pt]**

(b) Jetzt machen wir eine weitere Annahme, die uns zum Planckschen Gesetz bringt: Wie Einstein 1905 nehmen wir an, dass die Energie nur in Vielfachen von $\hbar\omega$ vorkommt, den Energiequanten $E_n = n\hbar\omega$ mit $n = 0, 1, \ldots, \infty$. Berechne die mittlere Energie $\bar{E}_n$ analog zu (a). **[2pt]**
Tipp: Kurze Erinnerung an die geometrische Reihe.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{wenn } |x| < 1. \tag{5.6}$$

(c) Zeige, dass das Plancksche Gesetz 5.2 für große Wellenlängen durch Rayleigh-Jeans 5.1 approximiert werden kann. **[1pt]**