

1 Störungstheorie [5pt]

Ein Neutron der Masse $m = 1.6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ist in einem eindimensionalen Potentialkasten entlang der vertikalen z -Achse mit Höhe h eingeschlossen. Das Potential lautet:

$$V(z) = \begin{cases} 0 & 0 \leq z \leq h \\ \infty & z < 0, z > h \end{cases} \quad (1)$$

Nimm an, dass sich das Neutron nur vertikal bewegen kann. Die normierten Energieeigenzustände sind:

$$\psi_n(z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{h}} \sin \frac{n\pi z}{h} & 0 \leq z \leq h \\ 0 & z < 0, z > h \end{cases} \quad (2)$$

mit $n \in \mathbb{N}^+$. Die entsprechenden Energieeigenwerte lauten:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mh^2} \quad (3)$$

So weit so gut. Was ist aber mit dem Effekt der Gravitation? Wir betrachten das modifizierte Potential:

$$V'(z) = \begin{cases} mgz & 0 \leq z \leq h \\ \infty & |z| > h \end{cases} \quad (4)$$

wobei g die Erdbeschleunigung ($g \approx 10 \text{ m/s}^2$) ist. Wir verwenden nun die Störungstheorie, um den Einfluss der Gravitation auf die Energieeigenwerte abzuschätzen.

(a) Verwende die Formel für die Korrektur erster Ordnung für die Eigenenergie:

$$E_n^{(1)} = \int dz \psi_n^{*(0)} V' \psi_n^{(0)} \quad (5)$$

um den Energie-Shift des Grundzustands $E_1^{(1)}$ zu berechnen. Hier entspricht V' der Perturbation, d.h. $V'(z) = mgz$ für $0 \leq z \leq h$. **[3pt]**

(b) Bestimme wie klein die Höhe h sein soll, damit die durch die Gravitation verursachte Energiekorrektur klein bleibt und unsere Ansatz mittels Störungstheorie valide ist. **[2pt]**

2 Störungstheorie mit Entartung [7pt]

Wir betrachten in dieser Aufgabe das "Teilchen auf dem Ring", das ihr bereits auf Übungsblatt 4 kennengelernt habt. Ein freies Teilchen mit Masse m , das sich auf einem Ring mit Länge L bewegt, hat Eigenzustände

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2\pi i n x / L}, \quad (6)$$

mit $-L/2 < x < L/2$ und $n \in \mathbb{Z}$.

- (a) Erinnere dich an (oder berechne) die erlaubten Energien E_n , die den Zuständen ψ_n zugeordnet sind. Für welche n sind die Energie-Eigenwerte entartet? Was ist der Entartungsgrad? **[1pt]**
- (b) Wir führen jetzt die kleine Störung

$$V = -V_0 e^{-x^2/a^2} \quad (7)$$

ein, wobei $a \ll L$ gilt. Folge dem Rezept aus Abschnitt 6.1.3 des Skripts und berechne die hermitesche Matrix $M_{l,j} = \langle \psi_l | V | \psi_j \rangle$. **[4pt]**

Tipps:

1. In diesem Fall ist M eine 2×2 -Matrix.
 2. Die Integrale lassen sich lösen, wenn man die Integrationsgrenzen auf $\pm\infty$ ausweitet (Bonusfrage: Wieso ist das in Ordnung?).
- (c) Diagonalisiere M und berechne die Energie-Korrekturen erster Ordnung. **[2pt]**

3 Absorption und Stimulierte Emission[8+3pt]

Wir betrachten ein zweiniveau-System mit Hamilton-operator H_0 , welcher die Eigenwert-Eigenvektor paare $(E_a, |\psi_a\rangle), (E_b, |\psi_b\rangle)$ hat, wobei $E_a < E_b$, wodurch $|\psi_a\rangle$ der Grundzustand und $|\psi_b\rangle$ ein angeregter Zustand ist. Betrachtet den Fall, dass das System ab dem Zeitpunkt $t = 0$ einer Zeitabhängigen Störung ausgesetzt ist, wobei der Hamiltonian durch

$$H = H_0 + \lambda V \cos(\omega t), \quad t > 0, \quad (8)$$

ersetzt wird¹, mit $0 < \lambda \ll 1$. Hierbei ist V ein konstanter operator mit Matrixelementen

$$\langle \psi_a | V | \psi_a \rangle = \langle \psi_b | V | \psi_b \rangle = 0, \quad \langle \psi_a | V | \psi_b \rangle = V_{ab} \neq 0. \quad (9)$$

ist. Benutzt zeitabhängige Störungstheorie für folgende Aufgaben:

- (a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist das System im Grundzustand $|\psi(t=0)\rangle = |\psi_a\rangle$. Was ist die Übergangsamplitude $c(t) = \langle \psi_b(t) | \psi(t) \rangle$, dass sich das System zum Zeitpunkt $t > 0$ im angeregten Zustand ψ_b befindet? Das Ergebnis nimmt die Form

$$c(t) = A \left[\frac{f(t)}{\omega_0 - \omega} + \frac{g(t)}{\omega_0 + \omega} \right] \quad (10)$$

an, wobei $\omega_0 = \frac{E_b - E_a}{\hbar}$. Bestimmt die konstante A und die funktionen $f(t), g(t)$. **[4pt]**

¹Dies kann man sich Vorstellen als das Vorbeiziehen einer Elektromagnetischen Wellen mit frequenz ω an einem Atom

- (b) Nun macht die Annahme, dass $|\omega_0 - \omega| \ll |\omega_0 + \omega|$, also der erste Term einen viel größeren Beitrag hat. Vernachlässigt den term proportional zu $g(t)$ und bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt t das System im Zustand ψ_b gemessen wird.² **[2pt]**
- (c) Zu welchen Zeitpunkten ist die Übergangswahrscheinlichkeit am größten und zu welchen Zeitpunkten verschwindet die Wahrscheinlichkeit? **[2pt]**
- (d)* Betrachtet nun die umgekehrte Situation, dass das System zum Zeitpunkt $t = 0$ im angeregten Zustand $|\psi_b\rangle$ ist. Wie lautet die Übergangswahrscheinlichkeit in den Zustand $|\psi_a\rangle$ unter der gleichen Näherung aus Teilaufgabe (b)? **[+3pt]**³

²Man kann sich das vorstellen, dass das System ein quantum der Energie ω absorbiert hat und die Energie nutzt um angeregt zu werden

³Da die Wahrscheinlichkeit im allgemeinen nicht verschwindet, ist dieser Effekt die Stimulierte Emission: Durch Störung des Systems zerfällt das System vom angeregten Zustand und "gibt ein quantum der Energie ω " ab. Dies ist in diesem Fall nur eine Analogie, da der Potentialterm keine eigene quantenmechanische beschreibung durch Quanten hat, aber wird präzise, wenn man die gleiche Rechnung im Rahmen der Quantenelektrodynamik durchführt.