

## 1 Kopplung von Drehimpulsen [7 pt]

Wir betrachten die Addition zweier Drehimpulse. Der Gesamtdrehimpuls ist gegeben durch

$$J_i = L_i \otimes I + I \otimes L_i, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (1)$$

mit dem Identitätsoperator  $I$  und den gewöhnlichen Komponenten  $L_1, L_2, L_3$  des Drehimpulsoperators. Die Eigenzustände von  $L^2$  und  $L_3$  mit Eigenwert  $l(l+1)$  bzw.  $m$  bezeichnen wir wie gewohnt mit  $|l, m\rangle$ . Wir setzen  $\hbar = 1$ .

- Zeige, dass  $J$  ein Drehimpulsoperator ist (das heißt, dass er die entsprechenden Kommutationsrelationen erfüllt). **[2pt]**
- Ist der Produktzustand  $|l, m\rangle |l', m'\rangle$  ein Eigenzustand von  $J_3$ ? Begründe deine Antwort und gebe ggf. den zugehörigen Eigenwert an. **[2pt]**
- Ist der Produktzustand  $|l, m\rangle |l', m'\rangle$  ein Eigenzustand von  $J^2$ ? Begründe erneut deine Antwort und gebe ggf. den zugehörigen Eigenwert an. **[3pt]**  
*Hinweis:*  $J^2$  lässt sich durch die Operatoren  $I, L^2, L_3, L_+$  und  $L_-$  ausdrücken.

## 2 Zeeman und Stark Effekt in erster Ordnung [5+5 pt]

Ihr habt bisher kennengelernt, dass das Elektron im Wasserstoffatom durch Wellenfunktionen  $\psi_{n,l,m}$  beschrieben wird, wobei die Energieniveaus unabhängig von  $l, m$  und somit entartet sind. Hier werdet ihr studieren, wie diese Entartung durch zusätzliche Interaktionen gebrochen wird. Da das Elektron für  $l \neq 0$  einen Drehimpuls hat, wird dieses an äußere Magnet- oder elektrische Felder durch eine Dipolwechselwirkung<sup>1</sup> koppeln. Die jeweiligen Interaktionsterme sind gegeben durch

$$\begin{aligned} H_B &= -\boldsymbol{\mu}_B \cdot \mathbf{B}, \quad \boldsymbol{\mu}_B = -\frac{e}{2m_e c} \mathbf{L}, \quad \mathbf{L} = \hat{x} \times \hat{p}, \\ H_E &= -\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\mu}_E, \quad \boldsymbol{\mu}_E = -e\hat{x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Hier sind  $\mathbf{E}(\mathbf{B})$  die Vektoren der äußeren elektrischen (magnetischen) Felder und  $\boldsymbol{\mu}_E(\boldsymbol{\mu}_B)$  das elektrische (magnetische) Dipolmoment des Elektrons. Wie aus der Vorlesung bekannt, ist die Änderung der Energie eines Zustandes  $|\psi\rangle$  in erster Ordnung der Störungstheorie durch

$$\Delta E^{(1)} = \langle \psi | H_I | \psi \rangle. \quad (3)$$

gegeben. Betrachtet im Folgenden, dass entweder ein elektrisches Feld  $\mathbf{E} = E\hat{z}$  oder ein magnetisches Feld  $\mathbf{B} = B\hat{z}$  in die  $z$ -Richtung angelegt wurde, nicht beide auf einmal.

- Berechnet die Energiedifferenz, die der Grundzustand  $n = 1, l = 0, m = 0$  durch anlegen des Magnetfeldes in  $z$ -Richtung erfährt. **[2pt]**

<sup>1</sup>Dies sollte aus der Elektrodynamik bekannt sein, falls nicht, sind die notwendigen Formeln in der Aufgabenstellung gegeben.

- (b) Berechnet die Energiedifferenz, die die Zustände  $n = 2, l = 1, m = -1, 0, 1$  durch anlegen des Magnetfeldes in  $z$ -Richtung erfahren. **[3pt]**
- (c)\* Berechnet die Energiedifferenz, die der Grundzustand  $n = 1, l = 0, m = 0$  durch anlegen des elektrischen Feldes in  $z$ -Richtung erfährt. **[+2pt]**
- (d)\* Berechnet die Energiedifferenz, die die Zustände  $n = 2, l = 1, m = -1, 0, 1$  durch anlegen des elektrischen Feldes in  $z$ -Richtung erfahren. **[+3pt]**

Die extraaufgaben sollten einen unterschied zwischen dem magnetischen und elektrischen Feld klarmachen. Um die Aufhebung der Entartung im elektrischen Fall zu sehen, muss man zu höherer Ordnung in der Störungstheorie gehen.

### 3 Clebsch-Gordan [10 pt]

- (a) Finde analog zur Vorlesung die Zerlegung des Spinsystems  $D_1 \otimes D_{\frac{1}{2}} = D_{\frac{3}{2}} \oplus D_{\frac{1}{2}}$ . Was sind die Clebsch-Gordan Koeffizienten? **[3 pt]**
- (b) Zeige, dass die Clebsch-Gordan Koeffizienten des Tensorproduktes  $D_l \otimes D_{\frac{1}{2}}$  explizit darstellen kann durch:

$$\langle l, \frac{1}{2}, m \mp \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} | l, \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}, m \rangle = \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2}}{2l + 1}}. \mathbf{[5 pt]} \quad (4)$$

*Hinweis:* Betrachte wie in der Vorlesung  $\langle j_1 j_2, m_1, m_2 | M_{\pm} | j_1, j_2, j, m \rangle$ , wo  $m = m_1 + m_2$  ist (wieso?), indem du den Operator auf das Bra- und den Ket anwendest. Die Gleichung, die du erhält ist die Dreiecksrekursionsgleichung. Verwende Induktion über  $m$ . Starte die Induktion, indem du  $m = j - 1$  einsetzt. Um die Zustände in den beiden Basen zu identifizieren, betrachte die Zustände mit höchstem Spin, also maximal großem  $m$ .

- (c) Ein Elektron im Wasserstoffatom besitzt  $l = 1$ . Finde die Eigenzustände des totalen Drehimpulses  $|j, j_z\rangle$  in  $D_{\frac{3}{2}}$  in Termen der Basis beschrieben mit  $|m, s\rangle$ , wo  $m$  und  $s$  die  $z$ -Komponente des orbitalen Drehimpulses bzw. des Spins sind. **[2 pt]**