1 Kopplung von Drehimpulsen [7 pt]

Wir betrachten die Addition zweier Drehimpulse. Der Gesamtdrehimpuls ist gegeben durch

$$J_i = L_i \otimes I + I \otimes L_i, \quad i \in \{1, 2, 3\} \tag{1}$$

mit dem Identitätsoperator I und den gewöhnlichen Komponenten L_1, L_2, L_3 des Drehimpulsoperators. Die Eigenzustände von L^2 und L_3 mit Eigenwert $l(l+1)$ bzw. m bezeichnen wir wie gewohnt mit $|l, m\rangle$. Wir setzen $\hbar = 1$.

(a) Zeige, dass J ein Drehimpulsoperator ist (das heißt, dass er die entsprechenden Kommutationsrelationen erfüllt). **[2pt]**

Wir wissen, dass

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk} L_k, \qquad [L_i, L^2] = 0 \tag{2}$$

wobei $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$. Wir sollen zeigen, dass

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k, \qquad [J_i, J^2] = 0 \tag{3}$$

wobei $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$.
Weiters wissen wir aus Übungsblatt 3, dass

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD) \tag{4}$$

Demnach wissen wir für Kommutatoren:

$$[A \otimes B, C \otimes D] = (A \otimes B)(C \otimes D) - (C \otimes D)(A \otimes B) = (AC) \otimes (BD) - (CA) \otimes (DB) \tag{5}$$

Wir setzen nun die Definitionen ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= [L_i \otimes I + I \otimes L_i, L_j \otimes I + I \otimes L_j] \\
&= [I \otimes L_i, L_j \otimes I] + [I \otimes L_i, I \otimes L_j] + [L_i \otimes I, L_j \otimes I] + [L_i \otimes I, I \otimes L_j] \\
&= (L_j \otimes L_i) - (L_j \otimes L_i) + (I \otimes [L_i, L_j]) + ([L_i, L_j] \otimes I) + (L_i \otimes L_j) - (L_i \otimes L_j) \\
&= (I \otimes [L_i, L_j]) + ([L_i, L_j] \otimes I) \\
&= (I \otimes i\varepsilon_{ijk} L_k) + (i\varepsilon_{ijk} L_k \otimes I) \\
&= i\varepsilon_{ijk} \left[(I \otimes L_k) + (L_k \otimes I) \right] \\
&= i\varepsilon_{ijk} J_k
\end{aligned} \tag{6}$$

sowie

$$\begin{aligned}
[J_i, J^2] &= [J_i, \sum_{j=1}^{3} J_j^2] = \sum_{j=1}^{3} [J_i, J_j^2] \\
&= \sum_{j=1}^{3} (J_j [J_i, J_j] + [J_i, J_j] J_j) = \sum_{j=1}^{3} i\varepsilon_{ijk} \{J_j, J_k\} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Der letzte Schritt folgt, nachdem ε_{ijk} antisymmetrisch bezüglich Vertauschen von j und k ist, und der Antikommutator symmetrisch.

(b) Ist der Produktzustand $|l,m\rangle\,|l',m'\rangle$ ein Eigenzustand von J_3? Begründe deine Antwort und gebe ggf. den zugehörigen Eigenwert an. **[2pt]**

Wir zeigen:

$$\begin{aligned}
J_3\,|l,m\rangle\,|l',m'\rangle &= J_3(|l,m\rangle \otimes |l',m'\rangle)\\
&= (L_3 \otimes I + I \otimes L_3)(|l,m\rangle \otimes |l',m'\rangle)\\
&= (L_3 \otimes I)(|l,m\rangle \otimes |l',m'\rangle) + (I \otimes L_3)(|l,m\rangle \otimes |l',m'\rangle)\\
&= (L_3\,|l,m\rangle) \otimes (I \otimes |l',m'\rangle) + (I\,|l,m\rangle) \otimes (L_3\,|l',m'\rangle)\\
&= m\,|l,m\rangle\,|l',m'\rangle + m'\,|l,m\rangle\,|l',m'\rangle\\
&= (m+m')\,|l,m\rangle\,|l',m'\rangle
\end{aligned} \tag{8}$$

Somit ist $|l,m\rangle\,|l',m'\rangle$ ein Eigenzustand von J_3 mit Eigenwert $m+m'$. Andernfalls kann man argumentieren, dass die gleichen Eigenzustände geteilt werden aufgrund der Kommutationsrelation.

(c) Ist der Produktzustand $|l,m\rangle\,|l',m'\rangle$ ein Eigenzustand von J^2? Begründe erneut deine Antwort und gebe ggf. den zugehörigen Eigenwert an. **[3pt]**
Hinweis: J^2 lässt sich durch die Operatoren I, L^2, L_3, L_+ und L_- ausdrücken.

Wir können J^2 ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned}
J^2 = \sum_{i=1}^{3} J_i^2 &= \sum_{i=1}^{3} (L_i \otimes I + I \otimes L_i)^2\\
&= \sum_{i=1}^{3} (L_i \otimes I + I \otimes L_i)(L_i \otimes I + I \otimes L_i)\\
&= \sum_{i=1}^{3} (L_i \otimes I)^2 + (I \otimes L_i)^2 + (L_i \otimes I)(I \otimes L_i) + (I \otimes L_i)(L_i \otimes I)\\
&= \sum_{i=1}^{3} (L_i^2 \otimes I) + (I \otimes L_i^2) + (L_i \otimes L_i) + (L_i \otimes L_i)\\
&= (\sum_{i=1}^{3} L_i^2 \otimes I) + (I \otimes \sum_{i=1}^{3} L_i^2) + 2\sum_{i=1}^{3} (L_i \otimes L_i)\\
&= (L^2 \otimes I) + (I \otimes L^2) + 2(L \otimes L)
\end{aligned} \tag{9}$$

wobei $L \otimes L = \sum_{i=1}^{3} L_i \otimes L_i$. Wir können L umschreiben. Wir wissen, dass

$$L_1 = \frac{1}{2}(L_+ + L_-), \qquad L_2 = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-) \tag{10}$$

Wir schreiben daher $L \otimes L$ als:

$$
\begin{aligned}
L \otimes L &= L_1 \otimes L_1 + L_2 \otimes L_2 + L_3 \otimes L_3 \\
&= (\frac{1}{2}(L_+ + L_-)) \otimes (\frac{1}{2}(L_+ + L_-)) + (\frac{1}{2i}(L_+ - L_-)) \otimes (\frac{1}{2i}(L_+ - L_-)) + L_3 \otimes L_3 \\
&= \frac{1}{4}(L_+ + L_-) \otimes (L_+ + L_-) - \frac{1}{4}(L_+ - L_-) \otimes (L_+ - L_-) + L_3 \otimes L_3 \\
&= \frac{1}{2}\left(L_+ \otimes L_- + L_- \otimes L_+\right) + L_3 \otimes L_3
\end{aligned} \tag{11}
$$

Der Operator J^2 hat somit die Form

$$J^2 = (L^2 \otimes I) + (I \otimes L^2) + L_+ \otimes L_- + L_- \otimes L_+ + 2L_3 \otimes L_3 \tag{12}$$

Durch die Form von J^2 sehen wir, dass $|l, m\rangle\,|l', m'\rangle$ kein Eigenzustand von J^2 sein kann, nachdem er $L_+ \otimes L_- + L_- \otimes L_+$ enthält. Die Wirkung von J^2 ist somit nicht mehr diagonal in dieser Basis. Wir können dies auch explizit zeigen. Wir haben

$$\left[(L^2 \otimes I) + (I \otimes L^2) + 2L_3 \otimes L_3\right] |l, m\rangle\,|l', m'\rangle = \left[l(l+1) + l'(l'+1) + 2mm'\right] |l, m\rangle\,|l', m'\rangle \tag{13}$$

Nachdem allerdings

$$L_\pm\,|l, m\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}\,|l, m \pm 1\rangle \tag{14}$$

haben wir auch

$$
\begin{aligned}
&(L_+ \otimes L_- + L_- \otimes L_+)\,|l, m\rangle\,|l', m'\rangle \\
&= L_+ \otimes L_-\,|l, m\rangle\,|l', m'\rangle + L_- \otimes L_+\,|l, m\rangle\,|l', m'\rangle
\end{aligned} \tag{15}
$$

Im Allgemeinen ist der Produktzustand daher kein Eigenzustand von J^2. Andernfalls kann man argumentieren, dass nicht die gleichen Eigenzustände geteilt werden aufgrund der Kommutationsrelation.

2 Zeeman und Stark Effekt in erster Ordnung [5+5 pt]

Ihr habt bisher kennengelernt, dass das Elektron im Wasserstoffatom durch Wellenfunktionen $\psi_{n,l,m}$ beschrieben wird, wobei die Energieniveaus unabhängig von l, m und somit entartet sind. Hier werdet ihr studieren, wie diese Entartung durch zusätzliche Interaktionen gebrochen wird. Da das Elektron für $l \neq 0$ einen Drehimpuls hat, wird dieses an äußere Magnet- oder elektrische Felder durch eine Dipolwechselwirkung [1] koppeln. Die jeweiligen Interaktionsterme sind gegeben durch

$$
\begin{aligned}
&H_B = -\boldsymbol{\mu}_B \cdot \mathbf{B},\ \boldsymbol{\mu}_B = -\frac{e}{2m_e c}\mathbf{L},\ \mathbf{L} = \hat{x} \times \hat{p}, \\
&H_E = -\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\mu}_E,\ \boldsymbol{\mu}_E = -e\hat{x}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

[1] Dies sollte aus der Elektrodynamik bekannt sein, falls nicht, sind die notwendigen Formeln in der Aufgabenstellung gegeben.

Hier sind $\mathbf{E}(\mathbf{B})$ die Vektoren der äußeren elektrischen (magnetischen) Felder und $\boldsymbol{\mu}_E(\boldsymbol{\mu}_B)$ das elektrische (magnetische) Dipolmoment des Elektrons. Wie aus der Vorlesung bekannt, ist die Änderung der Energie eines Zustandes $|\psi\rangle$ in erster Ordnung der Störungstheorie durch

$$\Delta E^{(1)} = \langle\psi|H_I|\psi\rangle \,. \tag{17}$$

gegeben. Betrachtet im Folgenden, dass entweder ein elektrisches Feld $\mathbf{E} = E\hat{e}_z$ oder ein magnetisches Feld $\mathbf{B} = B\hat{e}_z$ in die z-Richtung angelegt wurde, nicht beide auf einmal.

(a) Berechnet die Energiedifferenz, die der Grundzustand $n = 1, l = 0, m = 0$ durch Anlegen des Magnetfeldes in z-Richtung erfährt. **[2pt]** Für ein Magnetfeld $B\hat{e}_z$ in z-Richtung ist

$$H_B = \frac{e}{2m_e c} L_z B, \tag{18}$$

[1pt] also ist das allgemeine Matrixelement

$$\langle n', l', m'|H_B|n, l, m\rangle = \frac{eB}{2m_e c} \langle n', l', m'|L_z|n, l, m\rangle = \frac{eB}{2m_e c} m\delta_{n',n}\delta_{l',l}\delta_{m',m}, \tag{19}$$

wobei wir verwendeten, dass der Zustand $|n, l, m\rangle$ ein Eigenzustand von L_z ist (es sei auch hier $\hbar = 1$). Damit ist die Störung diagonal. Wir sehen, dass nur Zustände mit $m \neq 0$ eine Änderung der Energie erfahren. Damit ist

$$\Delta E^{(1)}_{1,0,0} = 0 \tag{20}$$

[1pt] (Alternativ einen Punkt für das direkte Ausrechnen des Integrals)

(b) Berechnet die Energiedifferenz, die die Zustände $n = 2, l = 1, m = -1, 0, 1$ durch Anlegen des Magnetfeldes in z-Richtung erfahren. **[3pt]** Aus der vorherigen Aufgabe ist klar, dass nur die Zustände $|2, 1, \pm 1\rangle$ einen Energiesplit erfahren, der nicht verschwindet und den Wert

$$\Delta E^{(1)}_{2,1,\pm 1} = \pm \frac{eB}{2m_e c} \tag{21}$$

annimmt.**[3pt]** (alternativ **[1pt]** je Ausrechnen der Integrale) Die Zustände $|2, 0, 0\rangle, |2, 1, 0\rangle$ bleiben entartet. Da bei der Aufgabenstellung der Zustand $|2, 0, 0\rangle$ vergessen wurde ist dieser zu vernachlässigen.

(c)* Berechnet die Energiedifferenz, die der Grundzustand $n = 1, l = 0, m = 0$ durch Anlegen des elektrischen Feldes in z-Richtung erfährt.**[+2pt]** Die Wellenfunktionen sind

$$\begin{aligned}
\psi_{1,0,0} &= \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}} \\
\psi_{2,1,0} &= \sqrt{\frac{3}{96\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}} \cos\theta \\
\psi_{2,1,\pm 1} &= \sqrt{\frac{3}{96\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}} \sin\theta e^{\pm i\phi}
\end{aligned} \tag{22}$$

Die Störung nimmt in Kugelkoodinaten die Form

$$H_E = ezE = eEr\cos\theta \tag{23}$$

an **[1pt]**. Die Energieänderung berechnen wir durch

$$\begin{aligned}\Delta E^{(1)}_{1,0,0} &= \langle 1,0,0|H_E|1,0,0\rangle \\ &= eE\int_0^\infty drr^2\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^\pi d\theta\sin\theta r\cos\theta\frac{1}{\pi a_0^3}e^{-\frac{r}{a_0}} = 0\end{aligned} \tag{24}$$

[1pt] Dies folgt aus

$$\int_0^\pi d\theta\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{25}$$

(d)* Berechnet die Energiedifferenz, die die Zustände $n = 2, l = 1, m = -1, 0, 1$ durch Anlegen des elektrischen Feldes in z-Richtung erfahren.**[+3pt]** Da bei der Aufgabenstellung der Zustand $|2,0,0\rangle$ vergessen wurde, vernachlässigen wir im Folgenden die assoziierten Matrixelemente. Dies wird ein physikalisch falsches Ergebnis produzieren, da bei einer korrekten Betrachtung eine Entartung zwischen $|2,0,0\rangle$ und $|2,1,0\rangle$ aufgehoben wird, jedoch wird die Nichtaufhebung der Entartung der Zustände $|2,1,\pm1\rangle$ immer noch korrekt beschrieben. Wir benötigen die Matrixelemente

$$\langle 2,1,0|H_E|2,1,0\rangle\,,\langle 2,1,0|H_E|2,1,\pm1\rangle\,,\langle 2,1\pm1|H_E|2,1\pm1\rangle\,,\langle 2,1\mp1|H_E|2,1,\pm1\rangle\,. \tag{26}$$

Durch Einsetzen der Wellenfunktion sieht man, dass

$$\begin{aligned}\langle 2,1,0|H_E|2,1,0\rangle &\propto \int_0^\pi d\theta\sin\theta\cos^3\theta = 0\\ \langle 2,1,\pm1|H_E|2,1,\pm1\rangle &\propto \int_0^\pi d\theta\sin^3\theta\cos\theta = 0\\ \langle 2,1,\pm1|H_E|2,1,\mp1\rangle &\propto \int_0^\pi d\theta\sin^3\theta\cos\theta = 0\\ \langle 2,1,\pm1|H_E|2,1,0\rangle &\propto \int_0^{2\pi} d\phi e^{\pm i\phi} = 0\end{aligned} \tag{27}$$

Diese Integrale können per Hand oder durch Einsetzen in Mathematica ausgerechnet werden. Wir sehen, dass, falls nur die obigen Zustände existieren würden, man keine Aufhebung der Entartung hat. **[3pt]** Wenn man den Zustand $|2,0,0\rangle$ mitberücksichtigt, was hier aufgrund der irreführenden Aufgabenstellung nicht zu erwarten war, muss man noch die Matrixelemente

$$\langle 2,0,0|H_E|2,0,0\rangle\,,\langle 2,0,0|H_E|2,1,0\rangle \tag{28}$$

ausrechnen (die restlichen Elemente verschwinden ebenfalls). Das zweite Matrixelement verschwindet nicht und hat den Wert

$$\langle 2,0,0|H_E|2,1,0\rangle = -3eEa_0. \tag{29}$$

Durch Diagonalisierung sieht man, dass die Eigenwerte den Wert

$$\Delta_\pm^{(1)} = \pm 3eEa_0 \tag{30}$$

annehmen und deswegen die Aufhebung der Entartung durch Interaktion mit dem elektrischen Feld nur zwischen den $m = 0$ Zuständen stattfindet.

Die Extraaufgaben sollten einen Unterschied zwischen dem magnetischen und elektrischen Feld klarmachen. Um die Aufhebung der Entartung im elektrischen Fall zu sehen, muss man zu höherer Ordnung in der Störungstheorie gehen.

3 Clebsch-Gordan [10 pt]

(a) Finde analog zur Vorlesung die Zerlegung des Spinsystems $D_1 \otimes D_{\frac{1}{2}} = D_{\frac{3}{2}} \oplus D_{\frac{1}{2}}$. Was sind die Clebsch-Gordan Koeffizienten? **[3 pt]** Wir beschreiben $D_1 = \mathrm{span}\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$ und $D_{1/2} = \mathrm{span}\{|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\}$. Nach der Notation in der Vorlesung wissen wir die Basis von $D_1 \otimes D_{\frac{1}{2}}$ ist in der Form $|j^{(1)}, m^{(1)}; j^{(2)}, m^{(2)}\rangle$, und die Basis von $D_{\frac{1}{2}} \oplus D_{\frac{1}{2}}$ in der Form $|j^{(1)}, j^{(2)}; j, m\rangle$. Die Eigenvektoren der ersten Produktbasis sind $(J^{(1)})^2, J_3^{(1)}, (J^{(2)})^2, J_3^{(2)}$; jene der zweiten gekoppelten Basis allerdings $(J^{(1)})^2, (J^{(2)})^2, J^2, J_3$. Hier verstehen wir $J_3^{(1)}$ als definiert in dem Produkthilbertraum (d.h. Identität auf den Hilbertraum des zweiten Freiheitsgrades).
Wir wissen, dass $|j^{(1)} - j^{(2)}| \leq j \leq j^{(1)} + j^{(2)}$. Für unseren Fall gibt es daher für $j^{(1)} = 1, j^{(2)} = \frac{1}{2}$ nur $j = \frac{3}{2}$ und $j = \frac{1}{2}$. Wir wollen nun also $D_{\frac{3}{2}}$ und $D_{\frac{1}{2}}$ finden.
Wir beginnen damit $D_{3/2}$ (also $j = \frac{3}{2}$) zu finden. Die möglichen Vektoren in dieser Basis sind also (nachdem $m = -j, \cdots, j$): $|\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$. Wir wissen, dass $J_3 |j^{(1)}, m^{(1)}, j^{(2)}, m^{(2)}\rangle = (m^{(1)} + m^{(2)}) |j^{(1)}, m^{(1)}, j^{(2)}, m^{(2)}\rangle$. Weiters haben wir $J_3 |j^{(1)}, j^{(2)}; j, m\rangle = m |j^{(1)}, j^{(2)}; j, m\rangle$. Wir haben $m = m^{(1)} + m^{(2)}$. Wir wenden J_3 an auf das Basiselement von $D_1 \otimes D_{\frac{1}{2}}$ mit maximalem m für $j = \frac{3}{2}$, also $m = m^{(1)} + m^{(2)} = \frac{3}{2}$: $J_3 |1,1\rangle \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = (1+\frac{1}{2}) |1,1\rangle \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \frac{3}{2} |1,1\rangle \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$. Wir nennen $v = |1,1\rangle \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$. Also haben wir $J_3 v = \frac{3}{2} v$. Wir wissen also sofort, dass v in der gekoppelten Basis $|j^{(1)}, j^{(2)}; j, m\rangle$ mit $j = \frac{3}{2}, m = \frac{3}{2}$ entspricht. Für diesen Vektor mit höchstem m mit $j = \frac{3}{2}$, generieren wir nun ein weiteres Basiselement, indem wir sukzessive den Absteiger J_- anwenden, um m zu erniedrigen.
Nach Definition von J_- kann man $D_{3/2}$ nun erhalten durch:

$$\mathrm{span}\{v, J_- v, J_-^2 v, J_-^3 v\}, \tag{31}$$

da $J_-^4 v = 0$ (es gibt $2 \cdot j + 1 = 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 4$ Basiselemente hier). Außerdem wissen wir über einen Auf-/Absteigeoperator, dass

$$J_\pm \left| j^{(1)}, j^{(2)}; j, m \right\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \left| j^{(1)}, j^{(2)}; j, m \pm 1 \right\rangle \tag{32}$$

. Wir können die Aktion dieses Operators auch in der Produktbasis ermitteln. Wir haben

$$J_\pm = J_\pm^{(1)} \otimes I + I \otimes J_\pm^{(2)} \tag{33}$$

und wissen somit also

$$\begin{aligned} J_\pm \left| j^{(1)}, m^{(1)}; j^{(2)}, m^{(2)} \right\rangle = &\sqrt{j^{(1)}(j^{(1)}+1) - m^{(1)}(m^{(1)} \pm 1)} \left| j^{(1)}, m^{(1)} \pm 1; j^{(2)}, m^{(2)} \right\rangle \\ &+ \sqrt{j^{(2)}(j^{(2)}+1) - m^{(2)}(m^{(2)} \pm 1)} \left| j^{(1)}, m^{(1)}; j^{(2)}, m^{(2)} \pm 1 \right\rangle \end{aligned} \tag{34}$$

Damit ist direkt:

$$J_- v = J_- \left|1, 1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{2} \left|1, 0\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \left|1, 1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \tag{35}$$

Weiters:

$$\begin{aligned} J_-^2 v &= J_- \left(\sqrt{2} \left|1, 0\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \left|1, 1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \right) \\ &= 2 \left|1, -1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + 2\sqrt{2} \left|1, 0\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} J_-^3 v = J_- &\left(2 \left|1, -1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + 2\sqrt{2} \left|1, 0\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \right) \\ &= 6 \left|1, -1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \end{aligned} \tag{37}$$

Nach Normierung haben wir somit Zustände gefunden, die $D_{\frac{3}{2}}$ aufspannen.
Wir müssen nur noch Zustände finden, die $D_{\frac{1}{2}}$ aufspannen können. Da $D_{\frac{1}{2}}$ (also $j = \frac{1}{2}$) nur Zustände mit $m = \pm\frac{1}{2}$ hat, können wir in der gekoppelten Basis nur Vektoren als Linearkombinationen der Produktbasis erzeugen. Wir nehmen die Produktbasis-Elemente, für die $m^{(1)} + m^{(2)} = m = \pm\frac{1}{2}$. Wir haben daher aus der Produktbasis zur Auswahl $\left|1, 1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \left|1, 0\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle, \left|1, -1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$. Der Zustand mit $m = \frac{1}{2}$ ist eine Linearkombination aller jener Produktbasiselemente, sodass $m^{(1)} + m^{(2)} = m = \frac{1}{2}$, also

$$\left| j^{(1)}, j^{(2)}, j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2} \right\rangle = \alpha \left|1, 1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \beta \left|1, 0\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \tag{38}$$

Dieser Vektor muss $J_+ \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = 0$ erfüllen. Damit ist:

$$J_+ \left(\alpha \left|1, 1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \beta \left|1, 0\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \right) = \left(\alpha + \sqrt{2}\beta \right) \left|1, 1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = 0. \tag{39}$$

Also gilt $\beta = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$. Damit ist der Vektor mit dem höchsten Gewicht von $D_{\frac{1}{2}}$ (also $m = \frac{1}{2}$) einfach in der Produktbasis $\alpha\left(|1,1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle\right)$. Nun wenden wir einfach J_- noch einmal an um den Vektor mit $m = -\frac{1}{2}$ zu erhalten:

$$J_-\alpha\left(|1,1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle\right) \tag{40}$$

$$= \alpha\left(\sqrt{\frac{1}{2}}|1,0\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |1,-1\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle\right). \tag{41}$$

Ein weiteres Anwenden von J^- würde Null ergeben.
Wir müssen nun nur noch normieren. Die Basiselemente von der gekoppelten Basis (wir schreiben einfach $|j,m\rangle$ der Einfachkeit halber) können wir nun durch Linearkombination (mit Clebsch-Gordan-Koeffizienten) der Produktbasis angeben. In der gekoppelten Basis haben wir:

$$D_{\frac{3}{2}} = \text{span}\left(|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle\right) \tag{42}$$

$$D_{\frac{1}{2}} = \text{span}\left(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\right) \tag{43}$$

was nun in der Produktbasis bedeutet:

$$\begin{aligned} D_{\frac{3}{2}} = \text{span}\Big(&|1,1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1,1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \\ &\sqrt{\frac{1}{3}}|1,-1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |1,-1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\Big) \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} D_{\frac{1}{2}} = \text{span}\Big(&\sqrt{\frac{2}{3}}|1,1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1,0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \\ &\sqrt{\frac{1}{3}}|1,0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1,-1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle\Big) \end{aligned} \tag{45}$$

(b) Zeige, dass die Clebsch-Gordan Koeffizienten des Tensorproduktes $D_l \otimes D_{\frac{1}{2}}$ explizit dargestellt werden können durch:

$$\langle l, \frac{1}{2}, m \mp \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}|l, \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}, m\rangle = \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2}}{2l+1}}.\textbf{[5 pt]} \tag{46}$$

Im Allgemeinen kann die gekoppelte Basis $|j^{(1)}, j^{(1)}, j, m\rangle$ zur Produktbasis $|j^{(1)}, m^{(1)}, j^{(2)}, m^{(2)}\rangle$ geschrieben werden als Linearkombination mit Clebsch-Gordan Koeffizienten. Wir expandieren:

$$|j^{(1)}, j^{(1)}, j, m\rangle = \sum_{m^{(1)}+m^{(2)}=m} C(j^{(1)}, j^{(2)}, j, m^{(1)}, m^{(2)}, m)\,|j^{(1)}, j^{(2)}, m^{(1)}, m^{(2)}\rangle \tag{47}$$

wobei die Clebsch-Gordan-Koeffizienten gegeben sind durch

$$C(j^{(1)}, j^{(2)}, j, m^{(1)}, m^{(2)}, m) = \langle j^{(1)}, j^{(2)}, m^{(1)}, m^{(2)} | j^{(1)}, j^{(2)}; j, m\rangle \tag{48}$$

In unserem Fall haben wir $j^{(1)} = l$ und $j^{(2)} = \frac{1}{2}$. Wir transformieren ein System mit $j^{(1)} = l$ und $j^{(2)} = \frac{1}{2}$ in eines mit Gesamtdrehimpuls j, wobei $|j^{(1)} - j^{(2)}| \leq j \leq j^{(1)} + j^{(2)}$, also hier $l - \frac{1}{2} \leq j \leq l + \frac{1}{2}$, wir können also nur die folgende Dekomposition haben von der Produktbasis in die gekoppelte Basis von $l + \frac{1}{2}$ bis $l - \frac{1}{2}$ geht. Es gilt also:

$$D_l \otimes D_{\frac{1}{2}} = D_{l+\frac{1}{2}} \oplus D_{l-\frac{1}{2}}. \tag{49}$$

Wir betrachten zunächst das gekoppelte System mit $j = l + \frac{1}{2}$ ($D_{l+\frac{1}{2}}$), in dem wir maximal $m = l + \frac{1}{2}$ haben. Indem wir die Normalisierung für diesen höchsten Zustand wählen, sehen wir somit, dass $|j = l + \frac{1}{2}, m = l + \frac{1}{2}\rangle \equiv |j^{(1)} = l, m^{(1)} = l\rangle \otimes |j^{(2)} = \frac{1}{2}, m^{(1)} = \frac{1}{2}\rangle$. Nachdem $m^{(1)} + m^{(2)} = m$, und $m^{(2)} = \pm\frac{1}{2}$, wissen wir, dass $m^{(1)} = m \mp \frac{1}{2}$. Die Klein-Gordan-Koeffizienten, die wir suchen, sind daher:

$$\begin{aligned} C(j^{(1)}, j^{(2)}, j, m^{(1)}, m^{(2)}, m) &= \langle j^{(1)}, j^{(2)}, m^{(1)}, m^{(2)} | j^{(1)}, j^{(2)}; j, m\rangle \\ &= \langle l, \frac{1}{2}, m \mp \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} | l, \frac{1}{2}; l + \frac{1}{2}, m\rangle \end{aligned} \tag{50}$$

Den gekoppelten Zustand im $l+\frac{1}{2}$-Raum können wir als Linearkombination schreiben:

$$|l, \frac{1}{2}; l + \frac{1}{2}, m\rangle = a(m)\,|l, m - \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + b(m)\,|l, m + \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \tag{51}$$

Wir wollen zeigen, dass

$$a(m) = \sqrt{\frac{l + m + \frac{1}{2}}{2l + 1}}, \qquad b(m) = \sqrt{\frac{l - m + \frac{1}{2}}{2l + 1}} \tag{52}$$

da wir somit die Behauptung für die Klein-Gordon Koeffizienten gezeigt haen für den Fall $j = l + \frac{1}{2}$ (Man kann den Fall $j = l - \frac{1}{2}$ genauso machen).
Für $j = l + \frac{1}{2}$, wissen wir, dass:

$$J_\pm\,|j^{(1)}, j^{(2)}, l + \frac{1}{2}, m\rangle = \sqrt{(l + \frac{1}{2})(l + \frac{3}{2}) - m(m \pm 1)}\,|j^{(1)}, j^{(2)}, l + \frac{1}{2}, m \pm 1\rangle \tag{53}$$

Wir bemerken zudem, dass $J_\pm^\dagger = J_\mp$ gilt. Wir verringern also nun den höchsten Zustand $|l, \frac{1}{2}; l + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\rangle = |l, l\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$. Das bedeutet in der gekoppelten Basis:

$$\begin{aligned} J_-\,|l, \frac{1}{2}; l + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{(l + \frac{1}{2})(l + \frac{3}{2}) - (l + \frac{1}{2})(l - \frac{1}{2})}\,|l, \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}\rangle \\ &= \sqrt{2l + 1}\,|l, \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}\rangle \end{aligned} \tag{54}$$

Andererseits wirkt J_- in der Produktbasis so, dass:

$$\begin{aligned} J_- \left|l,l\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle &= \sqrt{l(l+1)-l(l-1)}\left|l,l-1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \left|l,l\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\ &= \sqrt{2l}\left|l,l-1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \left|l,l\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \end{aligned} \tag{55}$$

Setze nun unseren Ansatz mit $a(m)$ und $b(m)$ mit $m = l - \frac{1}{2}$ ein:

$$\sqrt{2l+1}\left|l,\frac{1}{2};l+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{2l+1}\left[a(l-\frac{1}{2})\left|l,l-1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + b(l-\frac{1}{2})\left|l,l\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right] \tag{56}$$

Wir setzen nun die Koeffizienten gleich und sehen

$$\sqrt{2l+1}a(l-\frac{1}{2}) = \sqrt{2l}, \qquad \sqrt{2l+1}b(l-\frac{1}{2}) = 1 \tag{57}$$

Somit

$$a(l-\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{2l}{2l+1}}, \qquad b(l-\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{1}{2l+1}} \tag{58}$$

Wir haben hier eingesetzt in den Ansatz $m = l - \frac{1}{2}$. Wir haben somit für dieses m gezeigt, dass die Koeffizienten in der vorgegebenen Form sind. Nun müssen wir weiters den Induktionsschritt zeigen. Angenommen für ein bestimmtes m gilt die behauptete Gleichung für $a(m)$ und $b(m)$, wir wollen dann folgern, dass das Resultat auch für $m-1$ gilt. Wie vorhin wenden wir nun J_- auf $|l,\frac{1}{2};l+\frac{1}{2},m\rangle$ an. Wir erhalten:

$$J_- \left|l,\frac{1}{2};l+\frac{1}{2},m\right\rangle = \sqrt{(l+\frac{1}{2})(l+\frac{3}{2})-m(m-1)}\left|l,\frac{1}{2};l+\frac{1}{2},m-1\right\rangle \tag{59}$$

Nun haben wir

$$\left|l,\frac{1}{2};l+\frac{1}{2},m\right\rangle = a(m)\left|l,m-\frac{1}{2}\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + b(m)\left|l,m+\frac{1}{2}\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \tag{60}$$

Man kann nun J_- auf obige Gleichung anwenden, und Koeffizienten vergleichen. Indem man die Form von $a(m)$ annimmt, kann man auch zeigen, dass $a(m-1)$ folgt. Demnach gilt die Behauptung. Man kann ähnlich auch die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für den Fall $j = l - \frac{1}{2}$ zeigen.

Hinweis: Betrachte wie in der Vorlesung $\langle j_1 j_2, m_1, m_2 | M_\pm | j_1, j_2, j, m\rangle$, wo $m = m_1 + m_2$ ist (wieso?), indem du den Operator auf das Bra- und den Ket anwendest. Die Gleichung, die du erhälst ist die Dreiecksrekursionsgleichung. Verwende Induktion über m. Starte die Induktion, indem du $m = j - 1$ einsetzt. Um die Zustände in den beiden Basen zu identifizieren, betrachte die Zustände mit höchstem Spin, also maximal großem m.

(c) Ein Elektron im Wasserstoffatom besitzt $l = 1$. Finde die Eigenzustände des totalen Drehimpulses $|j, j_z\rangle$ in $D_{\frac{3}{2}}$ in Termen der Basis beschrieben mit $|m, s\rangle$, wo m und

s die z-Komponente des orbitalen Drehimpulses bzw. des Spins sind. **[2 pt]** Die Eigenzustände sind mit $l = 1$ sind:

$$|\frac{3}{2}\rangle = |1, \frac{1}{2}\rangle \tag{61}$$

$$|-\frac{3}{2}\rangle = |-1, -\frac{1}{2}\rangle \tag{62}$$

$$|\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|0, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1, -\frac{1}{2}\rangle \tag{63}$$

$$|-\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|0, -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|-1, \frac{1}{2}\rangle\,. \tag{64}$$