

## 1 Das Stern-Gerlach Experiment: Ein 3D Kinoerlebnis (5pt)

In dieser Übungsaufgabe schauen wir uns das Stern-Gerlach Experiment aus der Vorlesung genauer an, doch ersetzen wir den Strahl von Silberatomen mit sichtbarem Licht. Das elektrische Feld eines Lichtstrahls, welches in  $z$ -Richtung propagiert mit Frequenz  $\omega$ , Impuls  $k$  und polarisiert ist in  $e_x$  oder  $e_y$  Richtung, kann beschrieben werden über die Fundamentallösungen für die elektrischen Felder, welche wir auf die Einheit  $|\mathbf{E}|^2 = 1$  normieren.

$$\mathbf{E}_{x/y}(z, t) = e_{x/y} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (1.1)$$

- (a) Betrachte eine Kinzuschauerin, welche eine 3D Brille mit Polaroidfilter entlang  $e_x$  bzw.  $e_y$ -polarisiertes Licht auf dem linken bzw. rechten Auge trägt und auf der Position  $z_0, |z_0| \gg 5\text{cm}$  sitzt. Wie muss das elektrische Feld des Filmes aussehen, damit die Zuschauerin die elektrischen Felder  $a(t)$  auf dem linken Auge und  $b(t)$  auf dem rechten Auge, normiert auf  $|a(t)|^2 + |b(t)|^2 = 1$ , wahrnimmt? **[1pt]**

$$\mathbf{E}(z_0, t) = a(t)e_x + b(t)e_y. \quad (1.2)$$

- (b) Was passiert, wenn die Zuschauerin eines ihrer Augen zuhält? Was hat dies mit dem Wellenfunktionskollaps zu tun (diskutiert mir euren Kommiliton\*innen). **[1pt]**

Wenn die Zuschauerin eines ihrer Augen zuhält, sieht ihr offenes Auge durch einen einfach-polarisierten Filter entlang der  $e_{x/y}$  Richtung. Das heißt, dass ihr offenes Auge hinter dem  $e_{x/y}$  Filter effektiv misst, ob das Wellenpaket eine  $e_{x/y}$ -Komponente hat. Würde das Wellenpaket noch weiterlaufen, hätte es durch den Filter nur noch diese eine Komponente, was einer projektiven Messung entspricht. Durch die Projektion auf die eine Polarisationskomponente, ist die Wellenfunktion hinter dem Filter relativ zu ihrem vorherigen Zustand kollabiert.

- (c) Welche Quantenmessung wird ausgeführt, wenn die Zuschauerin mit einem geschlossenen Auge den Film mit  $\phi = \pi/4$  gedrehtem Kopf betrachtet? **[1pt]**

Dies entspricht einer Messung, ob eine Wellenfunktionskomponente entlang der  $e_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x + e_y)$  Polarisationsachse besteht.

- (d) Wie lautet die Formulierung des obigen Experimentes mithilfe des *bra-ket* Formalismus, den ihr in der Vorlesung kennengelernt habt? Erklärt den mathematischen Zusammenhang zum Stern-Gerlach Experiment. **[2pt]**

Die Silberatome im Stern-Gerlach Experiment haben im Durchlaufen des  $z$ -orientierten Magnetfeldes eine Dipolachse  $S_z$ , entlang welcher sie parallel ( $|S_z; \uparrow\rangle$ ) oder antiparallel ( $|S_z; \downarrow\rangle$ ) orientiert sein können. Hier spannen die exklusiven Zustände  $\{|S_z; \uparrow\rangle, |S_z; \downarrow\rangle\}$  den Raum aller möglichen Kombinationen. Die Analogie zur Licht-

polarisation ist die Identifikation

$$|S_z; \uparrow\rangle \leftrightarrow e_x \text{ polarisiertes Licht,} \quad (1.3)$$

$$|S_z; \downarrow\rangle \leftrightarrow e_y \text{ polarisiertes Licht} \quad (1.4)$$

Ähnlich ist die Analogie zum  $\pi/4$  gedrehten Magnetfeld, welche den Atomstrahl in  $|S_x; \uparrow\rangle, |S_x; \downarrow\rangle$  Komponenten unterteilt die Filterung entlang der  $x'$ -Achse, korrespondierend zum  $\pi/4$  gedrehten Kopf der Zuschauerin.

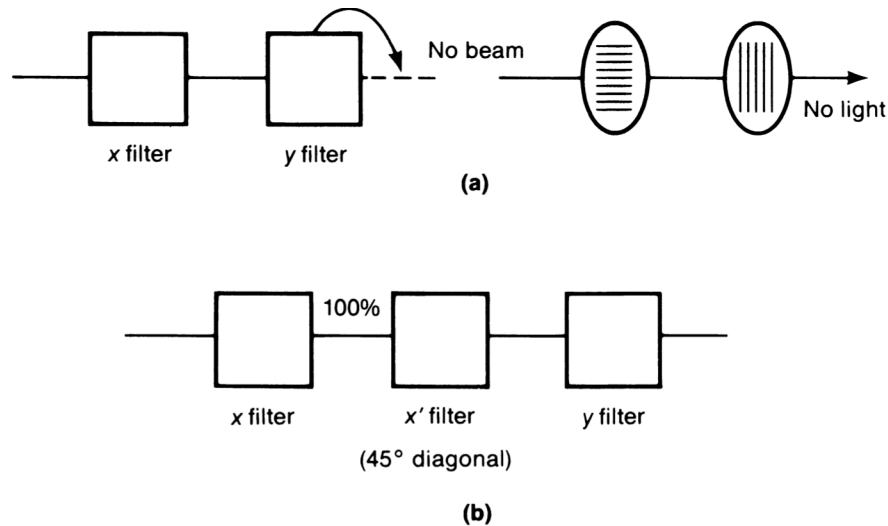


Figure 1: Darstellung aus Ref. [Sakurai, J. J., & Napolitano, J. Modern Quantum Mechanics (2020).]

## 2 Frühe Experimente der Quantenphysik (5pt)

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit grundlegenden Berechnungen, die von wichtigen Experimenten aus den Anfängen der Quantenphysik inspiriert sind. Diese Experimente zeigten, dass klassische Vorstellungen von Wellen und Teilchen nicht ausreichen, um das Verhalten von Quantenobjekten vollständig zu beschreiben.

- (a) In einem Doppelspaltexperiment, bei dem die Spalten durch einen Abstand  $d$  voneinander getrennt sind, interferieren die Lichtwellen aus den beiden Spalten miteinander. Die Bedingung für konstruktive Interferenz, bei der helle Streifen auf dem Detektionsschirm gemessen werden, lautet:

$$d \sin \theta = m\lambda \quad (2.1)$$

wobei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda$  die Wellenlänge des Lichts und  $\theta$  ein Winkel ist. Erklären Sie anhand einer Skizze, warum dies die Bedingung für konstruktive Interferenz ist.

Hinweis: Es können Näherungen für kleine Winkel verwendet werden, da wir annehmen, dass  $L$  viel größer ist als die Breite der Spalten und ihr Abstand  $d$ . **[2pt]**

Um konstruktive Interferenz beim Doppelspaltexperiment zu erhalten, muss der Weglängenunterschied  $\Delta l$  zwischen zwei Strahlen, die aus den Spalten  $S_1$  und  $S_2$  austreten, ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge sein. Da die beiden Strahlen zur Mitte des Projektorschirms gleich lang sind, d.h.  $\overline{S_1 P_0} = \overline{S_2 P_0}$ , befindet sich bei  $P_0$  das 0-te Maximum. Wir betrachten nun das nächste Maximum bei  $P_1$ , für das gilt:  $\Delta l = 1 \cdot \lambda$ , also eine Wellenlänge. Dieses Argument verallgemeinert sich auf  $\Delta l = m\lambda$ ,  $m \in \mathbb{N}$  für  $P_m$ .

Da  $L \gg d$ , sind die Winkel der austretenden Strahlen von den beiden Spalten zur Horizontalen  $MP_0$  annähernd gleich, d.h.  $\theta = \theta_1 \approx \theta_2$ . Die Strecken  $S_1 R$  und  $S_2 R$  stehen somit rechtwinklig zueinander. Daher ergibt sich  $\Delta l = d \sin \theta$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Mit  $\Delta l = m\lambda$  haben wir somit die gewünschte Bedingung gezeigt.

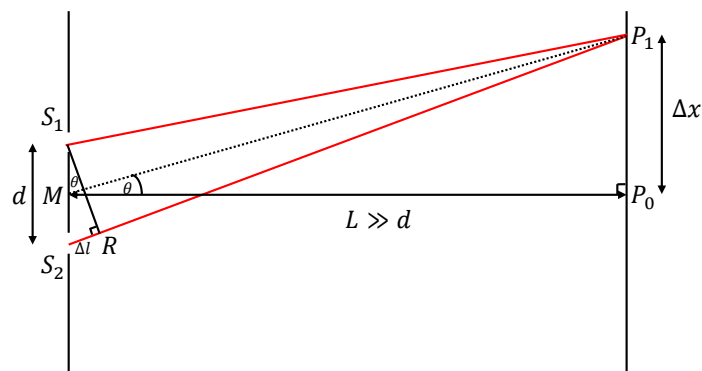


Figure 2: Doppelspalt

- (b) Eine Lichtquelle mit der Wellenlänge  $\lambda = 650\text{nm}$  wird in einem Doppelspaltexperiment verwendet. Der Schirm befindet sich in einer Entfernung von  $L = 2\text{m}$  von den Spalten. Der Abstand zwischen benachbarten Maxima auf dem Schirm wird mit  $\Delta x = 1\text{cm}$  gemessen. Berechne den Spaltabstand  $d$ . **[1pt]**

Gleichzeitig ergibt sich aus der Abbildung, dass  $\Delta x = L \tan \theta$ . Für kleine Winkel  $\theta$  gilt  $\cos \theta \approx 1$ , wodurch sich  $\tan \theta \approx \sin \theta$  vereinfacht. Damit ist der Abstand zwischen  $P_0$  und  $P_1$  gleich  $\Delta x \approx L \sin \theta$ . Daher können wir zusammen mit der

Bedingung für konstruktive Interferenz den Spaltabstand  $d$  wie folgt ausdrücken:

$$d = \frac{\lambda}{\sin \theta} = \frac{L\lambda}{\Delta x} \quad (2.2)$$

Wir erhalten für die gegebenen Parameter  $d = 130\mu\text{m}$ .

- (c) Nehmen wir an, Elektronen werden anstelle von Licht auf die Doppelspalte geschossen. Laut de Broglie besitzen auch Materieteilchen wie Elektronen eine ihnen zugeordnete Wellenlänge. Berechne die Geschwindigkeit  $v$  der Elektronen, die dieselbe Wellenlänge ( $\lambda = 650\text{nm}$ ) wie das in (b) verwendete Licht haben. **[1pt]**

Laut de Broglie wird die Materiewellenlänge von Elektronen durch die Formel  $\lambda = \frac{h}{p}$ , beschrieben, wobei  $p$  den Impuls des Teilchens darstellt. Im nicht-relativistischen Regime ist der Impuls  $p$  mit der Geschwindigkeit  $v$  durch  $p = mv$  verbunden, wobei  $m$  die Masse des Elektrons hier ist. Wir können daher nach der Geschwindigkeit umstellen:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \implies v = \frac{h}{m\lambda} \quad (2.3)$$

Setzen wir nun das Plancksche Wirkungsquantum  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{Js}$ , die Elektronenmasse  $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{kg}$  und  $\lambda = 650\text{nm}$ , wie zuvor verwendet, ein, erhalten wir  $v = 1119,65 \text{ms}^{-1}$ . Somit müssen wir die relativistischen Ausdrücke nicht verwenden.

- (d) Betrachte ein Experiment, bei dem Elektronen durch den Photoeffekt von einer Metalloberfläche emittiert werden, wenn diese mit Licht der Wellenlänge  $\lambda_0 = 310\text{nm}$  bestrahlt wird. Bei längeren Wellenlängen werden keine Elektronen emittiert. Berechne die minimale Frequenz  $\nu_i$  des einfallenden Lichts, sodass die emittierten Elektronen eine de-Broglie-Wellenlänge von  $\lambda = 650\text{nm}$  haben. **[1pt]**

Aus der Aufgabenstellung entnehmen wir, dass die Austrittsarbeit  $W$ , also die minimale Energie, die erforderlich ist, um ein Elektron von der Oberfläche des Materials zu entfernen, durch  $W = h\nu_0$  beschrieben, wobei  $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$  die entsprechende Frequenz ist und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum darstellt. Aufgrund von Energieerhaltung ist die maximale kinetische Energie  $K_{\text{max}}$  der emittierten Elektronen gegeben durch

$$K_{\text{max}} = E_i - W \quad (2.4)$$

wobei  $E_i = h\nu_i$  die Energie des einfallenden Photons ist. Wir können dann einsetzen:

$$K_{\text{max}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mh^2}{2m^2\lambda^2} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \quad (2.5)$$

Wir erhalten daher

$$\begin{aligned} K_{\text{max}} &= E_i - W \\ \frac{h^2}{2m\lambda^2} &= h(\nu_i - \nu_0) \\ \implies \nu_i &= \frac{h}{2m\lambda^2} + \nu_0 = \frac{h}{2m\lambda^2} + \frac{c}{\lambda_0} \approx 9,68 \cdot 10^{14} \text{Hz} \end{aligned} \quad (2.6)$$

### 3 Gaußsche Integrale, ein universelles Werkzeug (5pt)

Viele quantenmechanische Probleme werden lösbar, indem man sie auf das Auswerten eines Gaußschen Integrales reduzieren kann. Diese Methode findet Anwendung in weiten Teilen der Physik, angefangen bei der Beschreibung simpler Systeme wie dem harmonischen Oszillator, dem Wasserstoffatom bis hin zu Quantenfeldtheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie und Quantengravitation. Die folgende Aufgabe hat das Ziel, euch mit dem Lösen solcher Gaußscher Integrale vertraut zu machen.

Löst die folgenden Integrale, wobei ihr annehmen könnt, dass

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \quad (3.1)$$

gilt.

(a)

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} \quad \mathbf{[1pt]} \quad (3.2)$$

Mit der Substitution  $x = \frac{y}{\sqrt{a}}$ ,  $dx = \frac{1}{\sqrt{a}} dy$  finden wir

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (3.3)$$

nach Verwendung des Integrals  $I_0$  in der letzten Gleichung.

(b)

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+bx+c} \quad \mathbf{[2pt]} \quad (3.4)$$

Wir führen die folgende quadratische Ergänzung im Argument der Exponentialfunktion durch

$$-ax^2 + bx + c = -\left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{b^2}{4a} + c, \quad (3.5)$$

wodurch wir finden

$$I_2 = e^{+\frac{b^2}{4a}+c} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}})^2} \quad (3.6)$$

nun führen wir die Substitution  $y = \sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}$ ,  $dx = \frac{dy}{\sqrt{a}}$  durch, was ergibt

$$I_2 = e^{+\frac{b^2}{4a}+c} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} = e^{+\frac{b^2}{4a}+c} \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (3.7)$$

- (c) Sei  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  ein  $n$ -dimensionaler Vektor und  $A$  eine symmetrische, positiv definite Matrix.<sup>1</sup> Löse das Integral

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} d^n x e^{-\mathbf{x}^T A \mathbf{x}} \quad (3.8)$$

und schreibe das Ergebnis mithilfe der Determinante von  $A$ .

*Tipp:*  $A$  ist diagonalisierbar. [2pt] Da  $A$  diagonalisierbar ist, gibt es eine orthogonale Matrix  $O$  sodass  $A = O D O^T$ , wobei  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  eine diagonale Matrix ist, mit den Eigenwerten  $\lambda_i$  von  $A$  als Einträgen. Wir führen also die Substitution  $\mathbf{x} = O \mathbf{y}$  durch, wodurch wir mit mehrdimensionaler Substitution wie in (3.13) finden

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} d^n y e^{-\mathbf{y}^T O^T A O \mathbf{y}} = \int_{-\infty}^{\infty} d^n y e^{-\mathbf{y}^T \text{diag}(\lambda_i) \mathbf{y}} = \int_{-\infty}^{\infty} d^n y e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2} \quad (3.9)$$

Dieses Integral kann nun iterativ ausgeführt werden und geschrieben werden als

$$I_3 = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} dy_i e^{-\lambda_i y_i^2} = \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} \quad (3.10)$$

. Da  $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \text{Det}(A)$ , finden wir

$$I_3 = \text{Det}\left(\frac{A}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.11)$$

**Crashkurs - Mehrdimensionale Integrale:** Falls dies noch aus der Analysis unbekannt ist, im oberen Fall c) kann man das Integral iterativ lösen.  $\int_{-\infty}^{\infty} d^n x$  ist eine kurze Schreibweise für  $\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n$ , und "iterativ" bedeutet, dass man die Integrale nacheinander ausführen kann, wie z.B.

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy x^2 y = \int_0^1 dx x^2 \int_0^1 dy y = \int_0^1 dx \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{6}. \quad (3.12)$$

Substitution in solchen höherdimensional Integralen funktioniert wie folgt in dem für uns relevanten Fall: Wenn man ein Integral der Form

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d^n x f(\mathbf{x}) \quad (3.13)$$

hat und die Substitution  $\mathbf{x} = O \mathbf{y}$  durchführt, wobei  $O$  eine orthogonale Matrix ist ( $O^T O = O O^T = I$ ), dann gilt

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d^n y f(O \mathbf{y}). \quad (3.14)$$

---

<sup>1</sup>Die heißt, dass alle Eigenwerte von  $A$  positiv sind.

## 4 Eigenwerte ohne Matrizen? (5pt)

- (a) Wir betrachten den Hilbertraum der quadrat-summierbaren Folgen  $l_2$ :

$$l_2 = \left\{ x = (x_n)_{n=0}^\infty, \sum_{n=0}^\infty |x_n|^2 < \infty, (a, b) = \sum_{n=0}^\infty a_n^* b_n \right\}. \quad (4.1)$$

Ist  $l_2$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum? **[0,5pt]**

Sei  $(e^k)_{k=1}^n$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $\iota_n : \mathbb{R}^n \rightarrow l_2$  die Inklusion, die:

$$\iota_n : e^k = (0, \dots, 1, \dots) = e_k, \quad (4.2)$$

also die Folge mit Nullen an jeder Stelle, außer einer 1 an der  $k$ ten Stelle. Da es solche Inklusionen für alle  $k \in \mathbb{N}$  gibt, ist  $l_2$  nicht endlichdimensional.

- (b) Physikalische Observablen werden durch selbstadjungierte lineare Operatoren aufgefasst. Das Spektrum  $\sigma(A)$  eines solchen Operators beschreibt die Menge aller möglichen Messwerte von  $A$ . Im endlichdimensionalen Fall ist  $\sigma(A)$  genau die Eigenwerte von  $A$ . Im unendlichdimensionalen Fall ist dies nicht mehr zwingend der Fall.

$\lambda \in \sigma(A) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \psi_\varepsilon \in \mathcal{H}, (\|\psi_\varepsilon\| = 1) \text{ s.t. } \|(A - \lambda)\psi_\varepsilon\| < \varepsilon, \iff \{\lambda \in \mathbb{C}, (A - \lambda \mathbf{I}) \text{ hat keine beschränkte Inverse } \}.$

Sei nun  $S : l_2 \rightarrow l_2$ , die Abbildung:

$$S : (x_0, x_1, \dots) \rightarrow (0, x_0, x_1, \dots). \quad (4.3)$$

Zeige  $S$  besitzt keine Eigenwerte. **[0,5pt]**

Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert von  $S$ . Sei  $x_\lambda$  ein Eigenvektor zu diesem Eigenwert. Es folgt:

$$S(x) = (0, x_0, x_1, \dots) = \lambda x. \quad (4.4)$$

Also auch  $\lambda x_0 = 0, \lambda x_1 = x_0$  etc. Also gilt  $x_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}$ . Damit ist  $x = 0$ , somit kann  $S$  keinen Eigenwert haben.

- (c) Das Spektrum von  $S$  ist allerdings nicht leer. Zeige, dass  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$  gilt, dass:

$$\lambda > \|A\| \implies \lambda \notin \sigma(A), \quad \|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (4.5)$$

**[0,5pt]**

*Hinweis: Benutze (ohne zu zeigen), dass für  $\lambda > \|A\|$  gilt:*

$$(\lambda - A)^{-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \left( 1 + \sum_{k=1}^N \left( \frac{A}{\lambda} \right)^k \right) \quad (4.6)$$

Wir zeigen, dass  $(\lambda - A)$  eine beschränkte Inverse besitzt, falls  $\lambda > \|A\|$  ist. Aus dem Hinweis folgt:

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| = \left\| \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \left( 1 + \sum_{k=1}^N \left( \frac{A}{\lambda} \right)^k \right) \right\| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda|} \left( 1 + \sum_{k=1}^N \left( \frac{\|A\|}{|\lambda|} \right)^k \right). \quad (4.7)$$

Dies ist gleich:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda|} \left( 1 + \sum_{k=1}^N \left( \frac{\|A\|}{|\lambda|} \right)^k \right) = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|} < \infty, \quad (4.8)$$

da es sich um eine geometrische Reihe handelt und  $|\lambda| > \|A\|$  ist. Nach der Definition des Spektrums, kann  $\lambda$  also nicht in  $\sigma(A)$  sein.

- (d) Zeige, dass  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}$  abgeschlossen ist. **[1,5pt]**

*Hinweis: Benutze, dass die Menge der linearen Abbildungen mit beschränkter Inverse offen ist.*

Wir zeigen, dass die Menge  $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$  offen ist. Dafür behaupten wir, dass die Abbildung  $f(\lambda) = \lambda \mathbb{I} - A$  ist stetig in  $\lambda$ . Sie ist stetig, da  $\|f(\lambda_2) - f(\lambda_1)\| \leq |\lambda_2 - \lambda_1| \|\mathbb{I}\|$ . Nehme an  $\lambda - A$  ist invertierbar. Da die Menge der invertierbaren Matrizen offen ist, existiert ein Radius  $r > 0$ , sodass alle:

$$B_r(\lambda - A) = \{\lambda_1 - A, |\lambda_1 - \lambda| < r\}. \quad (4.9)$$

invertierbar sind. Für jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$ , sodass  $\lambda - A$  invertierbar ist, existiert also ein solches  $B_{r_\lambda}(\lambda - A)$ . Da  $f(\lambda)$  stetig ist, gilt zudem:

$$\mathbb{C} \setminus \sigma(A) = \bigcup_{\lambda: \|f(\lambda)^{-1}\| < \infty} f^{-1}(B_{r_\lambda}(\lambda - A)), \quad (4.10)$$

ist somit die Vereinigung von Urbildern offener Mengen und somit selbst offen.

- (e) Nehme an, es existiert eine zu  $A$  adjungierte lineare Abbildung, also, dass  $(Ax, y) = (x, A^\dagger y) \forall x, y \in \mathcal{H}$  ist. Zeige:

$$\sigma(A^\dagger) = \{\lambda^* \in \mathbb{C}, \lambda \in \sigma(A)\} \quad (4.11)$$

**[0,5pt]**

Es gilt  $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ . Falls  $(\lambda - A)$  invertierbar ist mit beschränkter Inverser, dann ist auch  $\lambda^* - A^\dagger$  invertierbar mit beschränkter Inverser. Also impliziert  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A) \implies \lambda^* \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A^\dagger)$ . Also gilt auch  $\lambda^* \in \sigma(A^\dagger) \implies \lambda \in \sigma(A)$ . Nach Vertauschen von  $A$  und  $A^\dagger$  folgt die Behauptung.



- (f) Nun kehren wir zu dem Beispiel zurück. Die Abbildung  $S^\dagger : (x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$  ist die zu  $S$  adjungierte lineare Abbildung. Zeige:

$$\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1 \implies \lambda \in \sigma(S^\dagger). \quad (4.12)$$

**[0,5pt]**

Sei  $\lambda$  ein Eigenwert und sei  $x$  ein Eigenvektor von  $S^\dagger$ . Dann gilt  $S^\dagger x = (x_1, x_2, \dots) = \lambda x = \lambda(x_0, x_1, \dots)$ . Die Gleichungen ergeben:

$$\lambda x_0 = x_1 \dots \lambda x_n = x_{n+1}. \quad (4.13)$$

Damit ist  $x = (x_0, \lambda x_0, \dots, \lambda^n x_0, \dots)$ . Damit  $x \in l_2$  ist, muss auch:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_0|^2 |\lambda|^{2n}. \quad (4.14)$$

$\|x\|^2 < \infty \iff |\lambda|^2 < 1$ . Damit sind alle  $\lambda$ , für die  $|\lambda|^2 < 1$  gilt, Eigenwerte von  $S^\dagger$ .

- (g) Bestimme mithilfe von (c)-(f):  $\sigma(S)$ . **[1pt]**

Aus (c) folgt, dass  $\lambda \leq \|S\|$  sein muss, falls  $\lambda \in \sigma(A)$  ist. Es gilt  $\|S\| = \|S^\dagger\| = 1$ . Dies sieht man, da:

$$\|(x_0, x_1, \dots)\| = \|(0, x_0, x_1, \dots)\| \quad (4.15)$$

ist. Aus (d), (e) und (f) folgt nun direkt:

$$\{|\lambda| < 1, \lambda \in \mathbb{C}\} \subset \sigma(S^\dagger) \subset \sigma(S). \quad (4.16)$$

Da  $\sigma(S)$  abgeschlossen ist, und  $\lambda$  mit  $|\lambda| > 1$  nicht in  $\sigma(S)$  liegen können, folgt:

$$\sigma(S) = \{|\lambda| \leq 1, \lambda \in \mathbb{C}\}. \quad (4.17)$$

## 5 Einsteins Lösung der "Ultraviolett-Katastrophe" (5pt)

In der Vorlesung haben wir die sogenannte "Ultraviolett-Katastrophe" kennengelernt: das Versagen der klassischen Physik, das Spektrum der Schwarzkörperstrahlung zu erklären. Laut dem klassischen Rayleigh-Jeans-Gesetz divergiert die Energiedichte der Strahlung für kleine Wellenlängen:

$$e_{\text{RJ}}(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B T. \quad (5.1)$$

Max Planck gelang es 1900 mit seinem Strahlungsgesetz, das Spektrum für alle Wellenlängen korrekt zu beschreiben:

$$e_{\text{P}}(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar \omega / (k_B T)} - 1}. \quad (5.2)$$

Innerhalb der klassischen Physik lässt sich das Gesetz allerdings nicht erklären. In dieser Aufgabe schauen wir uns genauer an, wie Albert Einstein 1905 die Erklärung geliefert und damit einen Grundstein der Quantenmechanik gelegt hat.

- (a) Zuerst leiten wir das Rayleigh-Jeans-Gesetz her. Dafür drücken wir die spektrale Energiedichte  $e(\omega)$  allgemein als Produkt aus der spektralen Modendichte  $n(\omega)$  und der mittleren Energie pro Mode  $\bar{E}$  aus:

$$e(\omega) = n(\omega)\bar{E}. \quad (5.3)$$

Wir nehmen ohne Herleitung an, dass

- die spektrale Modendichte durch

$$n(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \quad (5.4)$$

gegeben ist, und

- die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mode Energie  $E$  hat, der Boltzmann-Verteilung

$$p(E) = \frac{e^{-E/(k_B T)}}{\int_0^\infty e^{-E/(k_B T)} dE} \quad (5.5)$$

folgt.

Berechne die mittlere Energie  $\bar{E} = \int_0^\infty E p(E) dE$  und vervollständige damit die Herleitung. **[2pt]**

Zuerst berechnen wir das Integral  $\int_0^\infty e^{-E/(k_B T)} dE$ , das im Nenner von  $p(E)$  auftritt:

$$\int_0^\infty e^{-E/(k_B T)} dE = -k_B T e^{-E/(k_B T)} \Big|_0^\infty = k_B T.$$

Damit können wir jetzt das Integral für  $\bar{E}$  mit partieller Integration lösen.

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \int_0^\infty E p(E) dE = \frac{1}{k_B T} \int_0^\infty E e^{-E/(k_B T)} dE \\ &= \frac{1}{k_B T} \left( E(-k_B T) e^{-E/(k_B T)} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -k_B T e^{-E/(k_B T)} dE \right) \\ &= k_B T \end{aligned}$$

Multipliziert mit der Modendichte 5.4 erhalten wir das Rayleigh-Jeans-Gesetz.

- (b) Jetzt machen wir eine weitere Annahme, die uns zum Planckschen Gesetz bringt: Wie Einstein 1905 nehmen wir an, dass die Energie nur in Vielfachen von  $\hbar\omega$  vorkommt, den Energiequanten  $E_n = n\hbar\omega$  mit  $n = 0, 1, \dots, \infty$ . Berechne die

mittlere Energie  $\bar{E}_n$  analog zu (a). **[2pt]**

*Tipp:* Kurze Erinnerung an die geometrische Reihe.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{wenn } |x| < 1. \quad (5.6)$$

Analog zu (a) gehen wir von der Boltzmann-Verteilung aus und setzen für  $E$  die Annahme  $E_n = n\hbar\omega$  ein. Weil  $E_n$  nur diskrete Werte annimmt, ersetzen wir die Integration mit einer unendlichen Summe über  $n$ :

$$p(E_n) = \frac{e^{-E_n/(k_B T)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/(k_B T)}} = \frac{e^{-n\hbar\omega/(k_B T)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega/(k_B T)}}$$

Die mittlere Energie  $\bar{E}_n$  können wir nun berechnen als

$$\begin{aligned} \bar{E}_n &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n p(E_n) \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega e^{-n\hbar\omega/(k_B T)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega/(k_B T)}}. \end{aligned}$$

Um die geometrische Reihe sichtbar zu machen, substituieren wir  $x = e^{-\hbar\omega/(k_B T)}$ . Damit vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\bar{E}_n = \hbar\omega \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}.$$

Im Nenner können wir die geometrische Reihe direkt anwenden, nachdem wir uns vergewissert haben, dass  $|x| < 1$  erfüllt ist. Für den Zähler können wir die geometrische Reihe erneut anwenden, aber mit einem kleinen Trick: Wenn wir ein  $x$  ausklammern, erhalten wir die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ , was die erste Ableitung der gewöhnlichen geometrischen Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  nach  $x$  ist. Deshalb gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Insgesamt erhalten wir mit diesen beiden Anwendungen der geometrischen Reihe

$$\bar{E}_n = \hbar\omega x \frac{(1-x)}{(1-x)^2},$$

und nach Vereinfachung und Resubstitution

$$\begin{aligned} \bar{E}_n &= \hbar\omega e^{-\hbar\omega/(k_B T)} \frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega/(k_B T)}} \\ &= \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1}. \end{aligned}$$

Die Energiedichte und damit das Plancksche Strahlungsgesetz erhalten wir erneut nach Multiplikation mit der Modendichte.

- (c) Zeige, dass das Plancksche Gesetz 5.2 für große Wellenlängen durch Rayleigh-Jeans 5.1 approximiert werden kann. **[1pt]**

Große Wellenlängen entsprechen kleinen Frequenzen  $\omega$ . Wir können deshalb die Exponentialfunktion mit ihrer Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung nähern,  $e^x \approx 1 + x$ . Angewandt auf 5.2 erhalten wir

$$\begin{aligned} e_P(\omega) &= \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1} \\ &\approx \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{1 + \hbar\omega/(k_B T) - 1} \\ &= \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B T. \end{aligned}$$