1 Bra-ket Notation (5pt)

In der Vorlesung habt ihr die bra-ket Notation, auch Dirac-Notation genannt, kennen gelernt. Zur Übung, betrachtet den dreidimensionalen komplexen Hilbertraum $\mathbb{C}^3$. Wir wählen eine Basis mit

$$\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

Wir definieren die folgenden kets:

$$|a\rangle := 7i\,|0\rangle - |1\rangle + 3\,|2\rangle \quad \text{and} \quad |b\rangle := 2\,|0\rangle - 4i\,|1\rangle$$

(a) Gebe die zugehörigen Bras $\langle a|$ and $\langle b|$ der obigen Kets an. Berechne die Vektordarstellung bezüglich der oben gewählten basis für die Kets und Bras $|a\rangle$, $|b\rangle$, $\langle a|$, and $\langle b|$. **[1.5pt]**

(b) Berechne das Skalarprodukt $\langle a|b\rangle$ und $\langle b|a\rangle$, sowie die normierte Version von $|a\rangle$. **[1.5pt]**

(c) Berechne die Matrixdarstellung von $|a\rangle\langle b|$ in der obigen Basis. Für welche Wahl von zwei Kets $|a\rangle$ und $|b\rangle$ ist diese Matrix Hermitesch? **[2pt]**

2 Pauli Matrizen (5pt)

In der Vorlesung habt ihr die hermiteschen Pauli matrizen kennengelernt:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

(a) Bestimme die Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrizen σ_x, σ_y, and σ_z. Für die Eigenvektoren von σ_x und σ_y, drücke diese als Linearkombination der Eigenvektoren von σ_z aus. Anschließent, identifiziere die Eigenvektoren mit den abstrakten Eigenzuständen die ihr in der Vorlesung kennengelernt habt, also $\{|0\rangle, |1\rangle, |\pm\rangle, |\times\rangle, |\odot\rangle\}$. **[1.5pt]**

(b) Zeige, dass die Pauli matrizen die folgenden Kommutationsregeln, auch als Pauli spin algebra bekannt, erfüllen:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{2.2}$$

für $i, j, k \in \{x, y, z\}$, wobei ϵ_{ijk} das Levi-Civita Symbol ist. Hierbei wurde Einsteins Summationskonvention verwendet.
Zeige ebenfalls, dass sie die folgenden Antikommutationsregeln erfüllen:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}1 \tag{2.3}$$

[1.5pt]

(c) Zeige, dass für ein Produkt zweier Pauli matrizen die folgende Regel gilt

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} 1 + i\epsilon_{ijk}\sigma_k. \tag{2.4}$$

Ihr könnt ursprüngliche Ergebnisse zur Hilfe verwenden. **[1pt]**

3 Funktionalkalkül (3pt)

Wie ihr bald lernen werdet, ist es häufig wichtig funktionen auf Observablen anzuwenden

$$f(A) = A^2, \tag{3.1}$$

wobei man sich vorstellt die Funktion $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ auf die Observable A anzuwenden. Die Anwendung von FUnktionen auf operatoren ist als Funktionalkalkül bekannt. In endlich dimensionalen Hilberträumen und polynomialen Funktionen, kann diese Anwendung über die wiederholte Multiplikation einer Matrix A mit sich selbst definiert werden. Für allgemeinere Funktionen, wie beispielsweise den Logarithmus, ist es jedoch unklar, was mit $\log(A)$ gemeint sein soll. Wenn jedoch A diagonalisierbar ist, man also schreiben kann

$$A = \sum_{i=1}^{N} a_i \left|i\right\rangle \left\langle i\right|, \tag{3.2}$$

für Eigenvektoren $|i\rangle$ von A, dann definiert man

$$f(A) := \sum_{i=1}^{N} f(a_i) \left|i\right\rangle \left\langle i\right|. \tag{3.3}$$

Für Matrizen kann man also $f(A)$ entweder über eine diagonalisierung und anschließende anwendung von (3.3) berechnen oder wenn f als Potenzreihe dargestellt werden kann, über das Einsetzen von A in die Reihe. Im folgenden wendet ihr die für einige Beispiele an.

(a) Sei $A = \sigma_y$ die zweite Pauli matrix der Aufgabe 2. Berechne $f(A) = A^n$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$. **[1pt]**

(b) Sei

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 25 & -7 \\ -7 & 25 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Berechne $f(B) = \sqrt{B}$.**[2pt]**

4 Pauli Rotationen (4pt)

Pauli Matrizen sind Involutionen, was bedeutet, dass $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I$. Nutze dies um zu zeigen, dass

(a)
$$e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_y} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

[1.5pt]

(b)
$$e^{-i\frac{\theta}{2}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})} = \cos(\theta/2)\, I - i\sin(\theta/2)\,(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \tag{4.2}$$

für jeden normierten Vektor $\mathbf{n}$ und

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i\in\{x,y,z\}} n_i\sigma_i. \tag{4.3}$$

[1pt]

(c) Zeige, dass folgende Gleichung gilt:

$$e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_x}\sigma_z e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_x} = \cos(\theta)\,\sigma_z + \sin(\theta)\,\sigma_y. \tag{4.4}$$

[1.5pt]

5 Weyls Kommutatoren (5pt)

(a) Unter Verwendung der Definition der adjungierten eines Operator, zeige dass $i[A,B]$ selbstadjungiert ist, wenn A, B selbstadjungiert sind. **[1pt]**

(b) Zeige mithilfe der Kommutationsregel $[x,p] = i\hbar$, dass

$$e^{\frac{ipa}{\hbar}} x e^{-\frac{ipa}{\hbar}} = x + a. \tag{5.1}$$

[1pt]

(c) Wenn $f(x)$ eine Funktion ist, die als Potenzreihe entwickelt werden kann, zeige dass gilt:

$$e^{\frac{ipa}{\hbar}} f(x) e^{-\frac{ipa}{\hbar}} = f(x+a). \tag{5.2}$$

Nutze dies um *Weyl's* kommutationsregeln herzuleiten:

$$e^{\frac{ipa}{\hbar}} e^{\frac{ixb}{\hbar}} = e^{\frac{iba}{\hbar}} e^{\frac{ibx}{\hbar}} e^{\frac{ipa}{\hbar}} \tag{5.3}$$

[3pt]