1 Bra-ket Notation (5pt)

In der Vorlesung habt ihr die bra-ket Notation, auch Dirac-Notation genannt, kennengelernt. Zur Übung, betrachtet den dreidimensionalen komplexen Hilbertraum $\mathbb{C}^3$. Wir wählen eine Basis mit, die wir darstellen mit

$$\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

Wir definieren die folgenden kets:

$$|a\rangle := 7i\,|0\rangle - |1\rangle + 3\,|2\rangle \quad \text{and} \quad |b\rangle := 2\,|0\rangle - 4i\,|1\rangle$$

(a) Gib die zugehörigen Bras $\langle a|$ and $\langle b|$ der obigen Kets an. Berechne die Vektordarstellung bezüglich der oben gewählten basis für die Kets und Bras $|a\rangle$, $|b\rangle$, $\langle a|$, and $\langle b|$. **[1.5pt]**

Im Allgemeinen ist der zu einem Ket $\alpha\,|i\rangle$ assoziierte Bra gegeben durch $\alpha^*\,\langle i|$, wobei $\alpha \in \mathbb{C}$ und α^* die komplex conjugierte Zahl bezeichnet. Wir wenden dies auf $|a\rangle$ und $|b\rangle$ an:

$$\begin{aligned}\langle a| &= -7i\,\langle 0| - \langle 1| + 3\,\langle 2| \\ \langle b| &= 2\,\langle 0| + 4i\,\langle 1|\,.\end{aligned}$$

Um die Darstellungen der Kets in der Standardbasis zu berechnen, müssen wir lediglich die entsprechenden Spaltenvektoren für jeden Basis-Ket einsetzen:

$$|a\rangle \equiv \begin{pmatrix}7i\\-1\\3\end{pmatrix}$$
$$|b\rangle \equiv \begin{pmatrix}2\\-4i\\0\end{pmatrix}$$

Wir verwenden das Zeichen "$\equiv$" um anzuzeigen, dass das Objekt auf der linken und rechten Seite nicht dasselbe ist. Die Vektoren auf der rechten Seite *repräsentieren* die Kets auf der linken Seite in einer spezifischen, von uns gewählten Basis, während die Kets basisunabhängige Vektoren im Hilbertraum sind. Um die Darstellungen der Bras zu berechnen, nutzen wir die Tatsache, dass die Dualvektoren der Spaltenvektoren in der Standardbasis einfach die entsprechenden Zeilenvektoren sind. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle a| &\equiv \begin{pmatrix}-7i & -1 & 3\end{pmatrix} \\ \langle b| &\equiv \begin{pmatrix}2 & 4i & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b) Berechne das Skalarprodukt $\langle a|b\rangle$ und $\langle b|a\rangle$, sowie die normierte Version von $|a\rangle$. **[1.5pt]**

Es gibt mindestens zwei Möglichkeiten, diese Skalarprodukte zu berechnen: entweder innerhalb der Braket-Notation oder mit den expliziten Vektordarstellungen. Wir wählen die Braket-Notation und nutzen die Orthonormalität der Standardbasis ($\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$):

$$\begin{aligned}
\langle a|b\rangle &= (-7i\langle 0| - \langle 1| + 3\langle 2|)(2|0\rangle - 4i|1\rangle) \\
&= -14i\langle 0|0\rangle + 4i\langle 1|1\rangle \\
&= -10i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle b|a\rangle &= (2\langle 0| + 4i\langle 1|)(7i|0\rangle - |1\rangle + 3|2\rangle) \\
&= 14i\langle 0|0\rangle - 4i\langle 1|1\rangle \\
&= 10i
\end{aligned}$$

Dies sollte keine Überraschung sein, da $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$. Um $|a\rangle$ zu normalisieren, müssen wir es durch seine Norm $\||a\rangle\|$. Wir verwenden die in der Vorlesung eingeführte Norm $\||a\rangle\| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$, und berechnen

$$\begin{aligned}
\||a\rangle\| &= \sqrt{7^2 + 1 + 3^2} \\
&= \sqrt{59}
\end{aligned}$$

(c) Berechne die Matrixdarstellung von $|a\rangle\langle b|$ in der obigen Basis. Für welche Wahl von zwei Kets $|a\rangle$ und $|b\rangle$ ist diese Matrix hermitesch? **[2pt]**

Wir setzen die Darstellungen von $|a\rangle$ und $|b\rangle$ ein, die wir bereits oben berechnet haben:

$$\begin{aligned}
|a\rangle\langle b| &= \begin{pmatrix} 7i \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 14i & -28 & 0 \\ -2 & -4i & 0 \\ 6 & 12i & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit eine Matrix A hermitesch ist, muss sie die Bedingung $A^\dagger = A$ erfüllen, wobei $A^\dagger$ die konjugiert transponierte Matrix, oder Hermitesch Adjungierte, von A bezeichnet. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die obige Matrix nicht hermitesch ist, indem man explizit die Transposition und die komplexe Konjugation durchführt. Die Forderung, dass $|a\rangle\langle b|$ hermitesch ist, bedeutet, dass $(|a\rangle\langle b|)^\dagger$ gleich $|a\rangle\langle b|$ sein sollte. Da jedoch $(|a\rangle\langle b|)^\dagger = |b\rangle\langle a|$ gilt, bedeutet dies, dass wir $|b\rangle = \lambda |a\rangle$

benötigen, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$. Wenn wir fordern, dass $|a\rangle$ korrekt normalisiert ist, dann ist $\lambda = 1$. Ein Operator der Form $|a\rangle\langle a|$ ist ein Projektionsoperator: Er wirkt auf einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$, indem er ihn auf $|a\rangle$ projiziert, $|a\rangle\langle a| (|\psi\rangle) = \langle a|\psi\rangle |a\rangle$.

2 Pauli Matrizen (4+1pt)

In der Vorlesung habt ihr die hermiteschen Pauli Matrizen kennengelernt:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

(a) Bestimme die Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrizen σ_x, σ_y, and σ_z. Für die Eigenvektoren von σ_x und σ_y, drücke diese als Linearkombination der Eigenvektoren von σ_z aus. Anschließend, identifiziere die Eigenvektoren mit den abstrakten Eigenzuständen die ihr in der Vorlesung kennengelernt habt, also $\{|0\rangle, |1\rangle, |\pm\rangle, |\times\rangle, |\odot\rangle\}$. **[1.5pt]**

Die Eigenwerte λ_i der Pauli-Matrixzen σ_i lassen sich durch Lösen der charakteristischen Gleichung finden:

$$\det(\sigma_i - \lambda 1) = 0 \tag{2.2}$$

Wir erhalten die beiden Eigenwerte $\lambda_i^{(1)} = +1$ und $\lambda_i^{(2)} = -1$ für $i \in \{x, y, z\}$. Die Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ können dann durch Lösen der Gleichung

$$(\sigma_i - \lambda 1)\mathbf{v}_i = \mathbf{0} \tag{2.3}$$

gefunden werden. Durch korrekte Normierung, d.h. die Bedingung $|\mathbf{v}_i|^2 = 1$, erhalten wir die folgenden Eigenvektoren, die den jeweiligen Eigenwerten entsprechen:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_x^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_x^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}_y^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_y^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}_z^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_z^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Wir können die Eigenvektoren von σ_x, σ_y auch in Bezug auf die Eigenvektoren von σ_z wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_x^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{v}_z^{(1)} + \mathbf{v}_z^{(2)}), \qquad \mathbf{v}_x^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{v}_z^{(1)} - \mathbf{v}_z^{(2)}) \\ \mathbf{v}_y^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{v}_z^{(1)} + i\mathbf{v}_z^{(2)}), \qquad \mathbf{v}_y^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{v}_z^{(1)} - i\mathbf{v}_z^{(2)}) \end{aligned} \tag{2.5}$$

In der Darstellung der Pauli-Spin-Matrizen können wir die folgenden Zuordnungen machen:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_x^{(1)} &\mapsto |+\rangle\,, \mathbf{v}_x^{(2)} \mapsto |-\rangle \\ \mathbf{v}_y^{(1)} &\mapsto |\times\rangle\,, \mathbf{v}_y^{(2)} \mapsto |\odot\rangle \\ \mathbf{v}_z^{(1)} &\mapsto |0\rangle\,, \mathbf{v}_z^{(2)} \mapsto |1\rangle \end{aligned} \tag{2.6}$$

(b) Zeige, dass die Pauli-Matrizen die folgenden Kommutationsregeln, auch als Pauli-Spinalgebra bekannt, erfüllen:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{2.7}$$

für $i, j, k \in \{x, y, z\}$, wobei ϵ_{ijk} das Levi-Civita Symbol ist. Hierbei wurde Einsteins Summationskonvention verwendet.
Zeige ebenfalls, dass sie die folgenden Antikommutationsregeln erfüllen:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}1 \tag{2.8}$$

[1.5pt]

Um die Kommutationsrelationen der Pauli-Matrizen zu zeigen, verwenden wir $[\sigma_i, \sigma_j]$ als Kurzschreibweise für die $3 \times 3 = 9$ verschiedenen Kommutatoren. Einige dieser Kommutatoren sind jedoch redundant und können ohne explizite Berechnung abgeleitet werden. Die drei Kommutatoren, bei denen $i = j$ gilt, ergeben Null. Dies ist konsistent mit der rechten Seite der Gleichung, da das Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} Null ist, wenn zwei Indizes gleich sind. Somit bleiben sechs Kommutatoren zu berechnen. Die Antisymmetrie-Eigenschaft des Kommutators, d.h. $[\sigma_i, \sigma_j] = -[\sigma_j, \sigma_i]$, , reduziert unsere Berechnungen weiter, indem weitere drei Kommutatoren redundant werden. Die rechte Seite respektiert diese Symmetrie, da das Vertauschen von zwei Indizes im Levi-Civita-Symbol ein zusätzliches Minuszeichen mit sich bringt. Das bedeutet, dass wir nur drei verschiedene Kommutatoren berechnen müssen: $[\sigma_x, \sigma_y], [\sigma_y, \sigma_z], [\sigma_z, \sigma_x]$. Für $[\sigma_x, \sigma_y]$:

$$\begin{aligned} [\sigma_x, \sigma_y] &= \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 2i\sigma_z \end{aligned} \tag{2.9}$$

Für $[\sigma_y, \sigma_z]$:

$$\begin{aligned} [\sigma_y, \sigma_z] &= \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_y \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 2i\sigma_x \end{aligned} \tag{2.10}$$

Für $[\sigma_z, \sigma_x]$:

$$\begin{aligned} [\sigma_z, \sigma_x] &= \sigma_z\sigma_x - \sigma_x\sigma_z \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2i\sigma_y \end{aligned} \tag{2.11}$$

Die erhaltenen Ergebnisse sind zyklisch, d.h. $x \to y \to z \to x \to$ ...., in den Kommutatoren, für die das Levi-Civita-Symbol $+1$ ergibt. Daher haben wir die Identität verifiziert: $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$.

(c) Zeige, dass für ein Produkt zweier Pauli-Matrizen die folgende Regel gilt

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}1 + i\epsilon_{ijk}\sigma_k. \tag{2.12}$$

Ihr könnt ursprüngliche Ergebnisse zur Hilfe verwenden. **[1pt]**

Anstatt alle neun Kombinationen explizit zu berechnen, verwenden wir das folgende Resultat für zwei Operatoren A und B, deren Produkt wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$AB = \frac{1}{2}\left([A, B] + \{A, B\}\right) \tag{2.13}$$

Man sollte sich davon überzeugen, dass diese Beziehung gilt. Wenden wir dies auf die Pauli-Matrizen an, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sigma_i\sigma_j &= \frac{1}{2}\left(\{\sigma_i, \sigma_j\} + [\sigma_i, \sigma_j]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2\delta_{ij}1 + 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\right) \\ &= \delta_{ij}1 + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \end{aligned} \tag{2.14}$$

(d) Betrachten wir den Quantenzustand $|\chi\rangle = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Berechne die Erwartungswerte von σ_z und σ_y für diesen Zustand. **[Bonus: 1pt]**

Wir berechnen die Erwartungswerte in Matrixdarstellung. Die Erwartungswerte ergeben:

$$\begin{aligned} \langle\sigma_z\rangle = \langle\chi|\,\sigma_z\,|\chi\rangle &= \left[\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\left[\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}(9 - 16) = -\frac{7}{25} \end{aligned} \tag{2.15}$$

und

$$\begin{aligned} \langle\sigma_y\rangle = \langle\chi|\,\sigma_y\,|\chi\rangle &= \left[\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\left[\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4i \\ 3i \end{pmatrix} = \frac{1}{25}(-12i + 12i) = 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

3 Funktionalkalkül (3pt)

Wie ihr bald lernen werdet, ist es häufig wichtig Funktionen auf Observablen anzuwenden

$$f(A) = A^2, \tag{3.1}$$

wobei man sich vorstellt die Funktion $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ auf die Observable A anzuwenden. Die Anwendung von Funktionen auf Operatoren ist als Funktionalkalkül bekannt. In endlich-dimensionalen Hilberträumen und polynomialen Funktionen, kann diese Anwendung über die wiederholte Multiplikation einer Matrix A mit sich selbst definiert werden. Für allgemeinere Funktionen, wie beispielsweise den Logarithmus, ist es jedoch unklar, was mit $\log(A)$ gemeint sein soll. Wenn jedoch A diagonalisierbar ist, man also schreiben kann

$$A = \sum_{i=1}^{N} a_i \left|i\right\rangle \left\langle i\right| , \tag{3.2}$$

für Eigenvektoren $\left|i\right\rangle$ von A, dann definiert man

$$f(A) := \sum_{i=1}^{N} f(a_i) \left|i\right\rangle \left\langle i\right| . \tag{3.3}$$

Für Matrizen kann man also $f(A)$ entweder über eine Diagonalisierung und anschließende Anwendung von (3.3) berechnen oder wenn f als Potenzreihe dargestellt werden kann, über das Einsetzen von A in die Reihe. Im Folgenden wendet ihr diese für einige Beispiele an.

(a) Sei $A = \sigma_y$ die zweite Pauli-Matrix von Aufgabe 2. Berechne $f(A) = A^n$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$. **[1pt]**

Durch direkte Berechnung erhalten wir:

$$\sigma_y^1 = \sigma_y, \tag{3.4}$$

$$\sigma_y^2 = I. \tag{3.5}$$

Damit sehen wir, dass für gerade $n = 2m$

$$\sigma_y^{2m} = (\sigma_y^2)^m = I^m = I, \tag{3.6}$$

während für ungerade $n = 2m + 1$

$$\sigma_y^{2m+1} = \sigma_y^{2m}\sigma_y = I\sigma_y = \sigma_y. \tag{3.7}$$

(b) Sei

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 25 & -7 \\ -7 & 25 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Berechne $f(B) = \sqrt{B}$.**[2pt]**

Man kann raten (oder explizit berechnen), dass die Eigenvektoren von B wie folgt lauten:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 16$, Daraus folgt, dass mit

$$O = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

die Matrix B diagonalisiert werden kann zu

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = O^T B O. \tag{3.11}$$

Wir erhalten dann

$$\sqrt{B} = O\sqrt{D}O^T = O \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} O^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

4 Pauli Rotationen (4pt)

Pauli Matrizen sind Involutionen, was bedeutet, dass $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I$. Nutze dies um zu zeigen, dass

(a)

$$e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_y} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

[1.5pt]

Verwende die Darstellung der Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{4.2}$$

zusammen mit den Reihenentwicklungen

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \tag{4.3}$$

um zu schreiben

$$e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\theta/2)^{2k}}{(2k)!} \sigma_y^{2k} + \frac{(-i\theta/2)^{2k+1}}{(2k+1)!} \sigma_y^{2k+1} \tag{4.4}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\theta/2)^{2k} I - i \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\theta/2)^{2k+1} \sigma_y \tag{4.5}$$

$$= \cos(\theta/2) I - i \sin(\theta/2) \sigma_y. \tag{4.6}$$

Hier haben wir genutzt, dass $\sigma_y^2 = I$, sodass auch $\sigma_y^{2k} = I \, \forall k \in \mathbb{N}$.

(b)
$$e^{-i\frac{\theta}{2}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})} = \cos(\theta/2)\, I - i\sin(\theta/2)\,(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \tag{4.7}$$

für jeden normierten Vektor **n** und

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i\in\{x,y,z\}} n_i\sigma_i. \tag{4.8}$$

[1pt]

In a) war das einzige entscheidende Element, dass $\sigma_y^2 = I$. Wir sind also mit demselben Argument wie oben fertig, wenn wir zeigen können, dass $(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = I$. Wir erhalten

$$(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = \sum_{i,j\in\{x,y,z\}} n_i n_j \sigma_i\sigma_j. \tag{4.9}$$

Diese Summe ist unter Permutationen $i \leftrightarrow j$ symmetrisch, während $\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i$ if $i \neq j$. Daher überleben nur die Terme, bei denen $i = j$, und wir haben $\sigma_i\sigma_i = I$. Das ergibt also

$$\begin{aligned}
(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 &= \sum_{i,j\in\{x,y,z\}} n_i n_j \sigma_i\sigma_j &(4.10)\\
&= \sum_{i\in\{x,y,z\}} n_i^2\sigma_i^2 &(4.11)\\
&= \|\boldsymbol{n}\|^2 I = I, &(4.12)
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung die Normalisierung von $\boldsymbol{n}$ verwendet, also $\|\boldsymbol{n}\| = 1$.

(c) Zeige, dass folgende Gleichung gilt:

$$e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_x}\sigma_z e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_x} = \cos(\theta)\,\sigma_z + \sin(\theta)\,\sigma_y. \tag{4.13}$$

[1.5pt]

Wir verwenden die vorherigen Ergebnisse. Setzen wir $c_\theta = \cos(\theta/2)$ und $s_\theta = \sin(\theta/2)$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_x}\sigma_z e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_x} &= (c_\theta I + i s_\theta\sigma_x)\,\sigma_z\,(c_\theta I - i s_\theta\sigma_x) &(4.14)\\
&= c_\theta^2\sigma_z + s_\theta^2\sigma_x\sigma_z\sigma_x + i s_\theta c_\theta\sigma_x\sigma_z - i s_\theta c_\theta\sigma_z\sigma_x &(4.15)\\
&= \left(c_\theta^2 - s_\theta^2\right)\sigma_z + 2 s_\theta c_\theta\sigma_y &(4.16)\\
&= \cos(\theta)\,\sigma_z + \sin(\theta)\,\sigma_y, &(4.17)
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile, die Additionstheoreme verwendet haben $\cos(\theta/2+\theta/2) = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)$ and $\sin(\theta/2+\theta/2) = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$.

5 Weyls Kommutatoren (5pt)

(a) Unter Verwendung der Definition der Adjungierten eines Operator, zeige dass $i[A, B]$ selbstadjungiert ist, wenn A, B selbstadjungiert sind. **[1pt]**

Ein Operator A ist selbstadjungiert, wenn er bezüglich des Skalarprodukts die folgende Bedingung erfüllt:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \ \forall x, y \in H \tag{5.1}$$

Dann gilt:

$$\langle i[A, B]x, y\rangle = \langle x, -i[A, B]^\dagger y\rangle = \langle x, -i[B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger]x\rangle = \langle x, i[A, B]y\rangle, \tag{5.2}$$

weil $A^\dagger = A, B^\dagger = B$.

(b) Zeige mithilfe der Kommutationsregel $[x, p] = i\hbar$, dass

$$e^{\frac{ipa}{\hbar}} x e^{-\frac{ipa}{\hbar}} = x + a. \tag{5.3}$$

[1pt]

Wir behaupten:

$$[p^n, x] = -i\hbar n p^{n-1} \tag{5.4}$$

Wir zeigen dies durch Induktion (und zeigen hier nur den Induktionsschritt):

$$[p^n, x] = p[p^{n-1}, x] + [p^{n-1}, x]p = -i\hbar \left(pp^{n-2}(n-1) + p^{n-2}p\right) = -i\hbar \left(p^{n-1}n\right). \tag{5.5}$$

Wir vereinfachen weiters $[e^{\frac{ipa}{\hbar}}, x]$:

$$\begin{aligned}
[e^{\frac{ipa}{\hbar}}, x] &= \left[\sum_{k\geq 0} \frac{(ipa)^k}{\hbar^k k!}, x\right] \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{(ia)^k}{\hbar^k k!} \left[p^k, x\right] \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{(ia)^k}{\hbar^k k!} (-i\hbar k p^{k-1}) \\
&= ia \sum_{k\geq 0} \frac{(ia)^{k-1}}{\hbar^{k-1}(k-1)!} (-ip^{k-1}) \\
&= a \sum_{k\geq 0} \frac{(ipa)^{k-1}}{\hbar^{k-1}(k-1)!} = ae^{\frac{ipa}{\hbar}}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Dann

$$e^{\frac{ipa}{\hbar}}x = xe^{\frac{ipa}{\hbar}} + [e^{\frac{ipa}{\hbar}}, x] = \left(xe^{\frac{ipa}{\hbar}} + ae^{\frac{ipa}{\hbar}}\right) = (x+a)e^{\frac{ipa}{\hbar}}. \tag{5.7}$$

Setzen wir dies zusammen:

$$e^{\frac{ipa}{\hbar}}xe^{-\frac{ipa}{\hbar}} = (x+a)e^{\frac{ipa}{\hbar}}e^{-\frac{ipa}{\hbar}} = x+a. \tag{5.8}$$

(c) Wenn $f(x)$ eine Funktion ist, die als Potenzreihe entwickelt werden kann, zeige dass gilt:

$$e^{\frac{ipa}{\hbar}}f(x)e^{-\frac{ipa}{\hbar}} = f(x+a). \tag{5.9}$$

Nutze dies um *Weyl's* Kommutationsregeln herzuleiten:

$$e^{\frac{ipa}{\hbar}}e^{\frac{ixb}{\hbar}} = e^{\frac{iba}{\hbar}}e^{\frac{ibx}{\hbar}}e^{\frac{ipa}{\hbar}} \tag{5.10}$$

[3pt]

Für den ersten Teil nehmen wir an, dass wir $f = \sum_{k\geq 0}\frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$ um 0 herum expandieren können. Nun, unter Verwendung des vorherigen Teils:

$$e^{\frac{ipa}{\hbar}}x^k e^{-\frac{ipa}{\hbar}} = \left(e^{\frac{ipa}{\hbar}}xe^{-\frac{ipa}{\hbar}}\right)\dots\left(e^{\frac{ipa}{\hbar}}xe^{-\frac{ipa}{\hbar}}\right) = (x+a)^k. \tag{5.11}$$

Daher ergibt sich durch Anwendung auf jeden Term der Summe:

$$e^{\frac{ipa}{\hbar}}f(x)e^{-\frac{ipa}{\hbar}} = \sum_{k\geq 0}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}e^{\frac{ipa}{\hbar}}x^k e^{-\frac{ipa}{\hbar}} = f(x+a). \tag{5.12}$$

Die zweite Aussage folgt, wenn wir $f(x) = e^{\frac{ibx}{\hbar}}$ verwenden:

$$e^{\frac{ipa}{\hbar}}e^{\frac{ibx}{\hbar}}e^{-\frac{ipa}{\hbar}} = e^{\frac{ib(x+a)}{\hbar}} = e^{\frac{iba}{\hbar}}e^{\frac{ibx}{\hbar}}, \tag{5.13}$$

was nach Umstellen das ist, was wir zeigen wollten.