1 Unendliche Fluktuationen (5pt)

Wir betrachten ein Teilchen, welches sich in einem eindimensionalen Raum bewegen kann und keine inneren, also bspw. Spin Freiheitsgrade hat, sodass dessen Zustand vollständig durch seinen Ort $x \in \mathbb{R}$ beschrieben wird.

(a) Welcher Hilbertraum beschreibt das obige system? **[0,5pt]**

(b) Nehme an, dass die Wellenfunktion des Teilchens, bis auf eine Konstante C durch

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = Ce^{-ax}\Theta(x),\ a > 0 \tag{1.1}$$

beschrieben wird. Hierbei ist $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ die Heaviside-theta funktion, die bewirkt, dass das Teilchen nur im Bereich $x \geq 0$ zu finden ist. (Stellen Sie sich vor, dass das Teilchen durch eine Wand gehindert wird sich in $x < 0$ aufzuhalten) Finde die korrekt normierte Wellenfunktion. **[0,5pt]**

(c) Auf welchem Ortsintervall $[0, x_0)$ wird das Teilchens mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% gemessen werden? **[1pt]**

(d) Wie lautet die Wellenfunktion im Impulsraum? *Tipp: Abschnitt 2.2.5 im Skript.* **[1pt]**

(e) Die Unschärfe einer Observablen O in einem Zustand $|\psi\rangle$ ist definiert als

$$(\Delta O)^2 := \langle\psi| O^2 |\psi\rangle - \langle\psi| O |\psi\rangle^2 . \tag{1.2}$$

Die Unschärfe misst wie stark eine Observable von ihrem Erwartungswert im mittel abweicht und misst daher, wie stark diese fluktuiert. Im folgenden betrachten wir den Operator $\hat{X}$ der als Multiplikation wirkt

$$\langle x| \hat{X} |\psi\rangle = x\psi(x), \tag{1.3}$$

also $(\hat{X}\psi)(x) = x\psi(x)$ für eine Wellenfuntion $\psi(x)$ und der Operator $\hat{P}$ wirkt Ableitung

$$\langle x| \hat{P} |\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x), \tag{1.4}$$

also $(\hat{P}\psi)(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)$. Im impulsraum ist die Wirkung umgekehrt, wir haben $(\hat{P}\psi)(p) = p\psi(p)$ und $(\hat{X}\psi)(p) = i\hbar\frac{d}{dp}\psi(p)$. Berechne die Unschärfe $\Delta\hat{X}$ und zeige, dass die Unschärfe $\Delta\hat{P}$ unendlich groß (undefiniert) ist. **[2pt]** *Tipp: Rechne für $\Delta\hat{P}$ im Impulsraum oder nehme an, dass $\int_0^\infty dx\delta(x)f(x) = \frac{f(0)}{2}$ ist, wobei $\delta(x)$ die Dirac-delta funktion ist, die erfüllt $\frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x)$, $\int_{-\infty}^\infty \delta(x)f(x) = f(0)$.*

2 Deformationen der kanonischen Kommutatorrelation (4pt)

Betrachte die Heisenbergsche Unschärferelation. Für zwei Observablen A und B eines Quantensystems im Zustand $|\psi\rangle$ lautet die Unschärferelation:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle\psi| [A, B] |\psi\rangle|. \tag{2.1}$$

Im eindimensionalen Raum ist die übliche Kommutatorrelation zwischen Position x und Impuls p gegeben durch $[x, p] = i\hbar$. Daraus folgt die bekannte Unschärferelation $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$.

In einigen Modellen der Quantengravitation wird jedoch die Kommutatorrelation deformiert zu:

$$[x, p] = i\hbar \left(1 + \beta p^2\right), \tag{2.2}$$

wobei $\beta \geq 0$. Der Fall $\beta = 0$ entspricht hierbei der kanonischen Kommutatorrelation.

Hinweis: Eine allgemeinere deformierte Kommutatorrelation würde auch einen x^2-Term enthalten, aber dieser wird in dieser Aufgabe nicht berücksichtigt.

(a) Leite die Positions-Impuls Unschärferelation her, die auf der modifizierten Kommutatorrelation $[x, p] = i\hbar \left(1 + \beta p^2\right)$ basiert. **[1pt]**

(b) Zeichne die erlaubten Regionen in der $(\Delta x, \Delta p)$-Ebene basierend auf der modifizierten Unschärferelation mit einem Wert $\beta > 0$ und vergleiche dies mit dem Fall für $\beta = 0$. Bestimme für beide Fälle die Randkurven, die die Grenze zwischen dem erlaubten und dem verbotenen Bereich darstellen. Leite die Gleichung insbesondere für die Randkurve für $\beta > 0$ her:

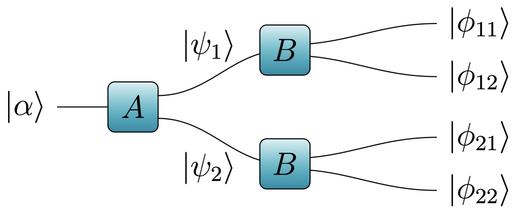
$$\Delta p = \frac{\Delta x}{\hbar\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{1}{\beta} - \langle p\rangle^2} \tag{2.3}$$

[2pt]

(c) Basierend auf der Gleichung für die Randkurve in (b), bestimme den kleinsten möglichen Wert der Positionsunschärfe Δx_0 (bei $\langle p\rangle = 0$). **[1pt]**

3 Messungen von Pauli-Observablen (5pt)

Wir betrachten den Zustand $|\alpha\rangle = \cos(\alpha/2)\,|0\rangle + \sin(\alpha/2)\,|1\rangle$ eines zweidimensionalen Systems, das wir in der folgenden Weise messen:



Die erste Messung A sei $A = \sigma_z$, wobei σ_z und σ_x im Folgenden die aus der Vorlesung bekannten Pauli-Matrizen sind. Die Standardbasis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ist wie üblich die Eigenbasis von σ_z.

(a) Berechne die Varianz $(\Delta A)^2 = (\Delta\sigma_z)^2$ der ersten Messung. Für welche Werte von α verschwindet die Varianz? Kommentiere kurz das Ergebnis. **[1pt]**

Nach der ersten Messung kann das System in zwei verschiedenen Zuständen sein, die wir $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ nennen. Diese Zustände messen wir jetzt ein zweites Mal mit der Observablen $B = \sigma_\theta = \cos(\theta)\sigma_z + \sin(\theta)\sigma_x$.

(b) In welchem Zustand befindet sich das System nach der zweiten Messung mit welcher Wahrscheinlichkeit? Berechne sowohl die Gesamtwahrscheinlichkeiten als auch die mit $|\psi_1\rangle$ oder $|\psi_2\rangle$ bedingten Wahrscheinlichkeiten. **[2pt]**

Jetzt vertauschen wir die Reihenfolge der beiden Messungen A und B: Wir messen zuerst σ_θ und dann σ_z.

(c) Berechne erneut die Gesamtwahrscheinlichkeiten und die bedingten Wahrscheinlichkeiten für alle vier möglichen Zustände nach der zweiten Messung und vergleiche die Ergebnisse mit denen aus Aufgabenteil (b). **[2pt]**

4 Tensorprodukt (11pt)

Der Zustandsraum eines Quantensystems mit mehreren Freiheitsgraden ist durch das Tensorprodukt der Hilberträume der einzelnen Freiheitsgrade gegeben. Im Folgenden wollen wir uns mit der Konstruktion solcher Tensorräume befassen.
Sei $\mathcal{H}_1$ ein d-dimensionaler Hilbertraum mit Basis $B_1 = \{|i\rangle_1\}_{i=1}^d$ und $\mathcal{H}_2$ ein weiterer D-dimensionaler Hilbertraum mit Basis $B_2 = \{|i\rangle_2\}_{i=1}^D$.
Man konstruiert einen neuen Vektorraum $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ in dem man die Menge von Tupeln $B_1 \times B_2 = \{(|i\rangle_1, |j\rangle_2) : |i\rangle_1 \in B_1, |j\rangle_2 \in B_2\}$ als Basis benutzt. Man schreibt anstelle von $(|i\rangle_1, |j\rangle_2)$ meist $|i\rangle |j\rangle$ oder $|i, j\rangle$ oder $|i\rangle \otimes |j\rangle$. Letztere Schreibweise lässt sich zu einer bilinearen Verknüpfung $\times : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ durch

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle := \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{D} \langle i| |\psi\rangle \langle j| |\phi\rangle |i, j\rangle \tag{4.1}$$

erweitern.

(a) Welche Dimension hat der Vektorraum $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$? Gib einen Hilbertraum an, der ein System aus n Spin-1/2-Teilchen beschreibt, welche Dimension hat dieser? (Mit Begründung.) **[2pt]**

(b) Zeige, dass die oben definierte Verknüpfung $\otimes : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ linear in beiden Argumenten ist. **[2pt]**

(c) Ist $\otimes : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ surjektiv? (Mit Begründung.) **[2pt]**

Der Dualraum eines Vektorraums $\mathcal{H}$ ist $\mathcal{H}^* := \{\langle\psi| : \mathcal{H} \to \mathbb{C}, \text{linear}\}$. $\mathcal{H}_1^*$ hat die zu B_1 duale Basis $\{\langle i|\}_{i=1}^d$, definiert durch die Orthonormalitätsrelation $\langle i| |j\rangle = \delta_{ij}$. Der Dualraum hat selbst die Struktur eines Vektorraums.

(d) Gib eine orthonormale Basis des Dualraums von $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ an. **[1pt]**

(e) Definiere ein kanonisches Skalarprodukt für den Dualraum. Zeige, dass der Dualraum damit ein Hilbertraum ist. (Zur Vollständigkeit reicht ein kurzer Kommentar.) **[2pt]**

Es gibt eine kanonische Identifikation von Vektoren in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1^*$ mit Operatoren von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_1$ auf die folgende Weise: Betrachte $A = |i\rangle \langle j| \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1^*$. A lässt sich als Operator auffassen, wobei $A|\psi\rangle = |i\rangle \langle j| |\psi\rangle$. Dies ist so naheliegend, dass Physiker normalerweise nicht darüber reden. Es erlabut beliebige Operatoren A bezüglich der Basis $O' = \{|i\rangle \langle j|, 1 \leq i, j \leq d\}$ zu entwickeln:

$$A = \sum_{i,j=1}^{d} \langle i| A |j\rangle |i\rangle \langle j| =: \sum_{i,j=1}^{d} A_{i,j} |i, j\rangle \tag{4.2}$$

Die Koeffizientenmatrix (A_{ij}) wird auch als darstellende Matrix des Operators A bezüglich der Basis O' bezeichnet.
Da wir das Tensorprodukt beliebiger Vektorräume definiert haben, verstehen wir auch was mit dem Tensorprodukt zweier Operatoren $AB \in (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1^*) \otimes (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1^*)$ gemeint ist. $A \otimes B$ kann wiederum als Operator auf $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$ aufgefasst werden. Überlege, wie dies im Detail funktioniert!

(f) Zeige, dass für alle Operatoren $A, B, C : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ und Vektoren $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$ die folgenden Rechenregeln gelten:

(i) $(A \otimes B)(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle) = (A|\phi\rangle) \otimes (B|\psi\rangle)$

(ii) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$

[2pt]