# 1 Unendliche Fluktuationen (5pt)

Wir betrachten ein Teilchen, welches sich in einem eindimensionalen Raum bewegen kann und keine inneren, also bspw. Spin-Freiheitsgrade hat, sodass dessen Zustand vollständig durch seinen Ort $x \in \mathbb{R}$ beschrieben wird.

(a) Welcher Hilbertraum beschreibt das obige System? **[0,5pt]**
$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ mit innerem Produkt

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f^*(x)g(x). \tag{1.1}$$

(b) Nehme an, dass die Wellenfunktion des Teilchens, bis auf eine Konstante $C$ durch

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = Ce^{-ax}\Theta(x),\ a > 0 \tag{1.2}$$

beschrieben wird. Hierbei ist $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ die Heaviside-Funktion, die bewirkt, dass das Teilchen nur im Bereich $x \geq 0$ zu finden ist. (Stelle dir vor, dass das Teilchen durch eine Wand gehindert wird, sich in $x < 0$ aufzuhalten) Finde die korrekt normierte Wellenfunktion. **[0,5pt]**
Die Normierungsbedingung ist

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, |\psi(x)|^2. \tag{1.3}$$

Somit berechnen wir

$$1 = C^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \Theta(x)e^{-2ax} = \frac{C^2}{2a} \Rightarrow C = \sqrt{2a}. \tag{1.4}$$

Also

$$\psi(x) = \sqrt{2a}e^{-ax}\Theta(x). \tag{1.5}$$

(c) Auf welchem Ortsintervall $[0, x_0)$ wird das Teilchen mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% gemessen werden? **[1pt]**
Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in einem Intervall ist

$$P(I) = \int_I |\psi(x)|^2\, \mathrm{d}x\,. \tag{1.6}$$

Wir berechnen also für ein beliebiges $x_0$

$$P([0, x_0]) = \int_0^{x_0} |\psi(x)|^2\, \mathrm{d}x = 2a \int_0^{x_0} e^{-2ax}\, \mathrm{d}x = -1(e^{-2ax_0} - 1) = 1 - e^{-2ax_0} \tag{1.7}$$

Dies soll 0.9 entsprechen, also

$$x_0 = -\frac{1}{2a}\ln(0.1). \tag{1.8}$$

(d) Wie lautet die Wellenfunktion im Impulsraum? *Tipp: Abschnitt 2.2.5 im Skript.* **[1pt]**

Die Fouriertransformationen in den $k$-Raum und in die andere Richtung lauten

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}\psi(x) \tag{1.9}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}\tilde{\psi}(k) \tag{1.10}$$

In den $p$-Raum ($p = \hbar k$) und in die andere Richtung haben wir hingegen

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\frac{p}{\hbar}x}\psi(x) \tag{1.11}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{i\frac{p}{\hbar}x}\tilde{\psi}(p) \tag{1.12}$$

Einsetzen der obigen Wellenfunktion ergibt

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\frac{p}{\hbar}x}\psi(x)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\frac{p}{\hbar}x}\left[\sqrt{2a}e^{-ax}\Theta(x)\right]\\ &= \sqrt{\frac{a}{\pi\hbar}}\int_0^{\infty} dx e^{-(a+i\frac{p}{\hbar})x}\\ &= \sqrt{\frac{a}{\pi\hbar}}\frac{e^{-(a+i\frac{p}{\hbar})x}}{-(a+i\frac{p}{\hbar})}\Big|_{x=0}^{\infty}\\ &= \sqrt{\frac{a}{\pi\hbar}}\frac{1}{a+i\frac{p}{\hbar}}\end{aligned} \tag{1.13}$$

(e) Die Unschärfe einer Observablen $O$ in einem Zustand $|\psi\rangle$ ist definiert als

$$(\Delta O)^2 := \langle\psi| O^2 |\psi\rangle - \langle\psi| O |\psi\rangle^2 . \tag{1.14}$$

Die Unschärfe misst, wie stark eine Observable von ihrem Erwartungswert im Mittel abweicht und misst daher, wie stark diese fluktuiert. Im Folgenden betrachten wir den Operator $\hat{X}$, der als Multiplikation wirkt

$$\langle x| \hat{X} |\psi\rangle = x\psi(x), \tag{1.15}$$

also $(\hat{X}\psi)(x) = x\psi(x)$ für eine Wellenfunktion $\psi(x)$. Der Operator $\hat{P}$ wirkt als Ableitung

$$\langle x| \hat{P} |\psi\rangle = -i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x), \tag{1.16}$$

also $(\hat{P}\psi)(x) = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)$. Im Impulsraum ist die Wirkung umgekehrt, wir haben $(\hat{P}\psi)(p) = p\psi(p)$ und $(\hat{X}\psi)(p) = i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\psi(p)$. Berechne die Unschärfe $\Delta\hat{X}$ und zeige, dass die Unschärfe $\Delta\hat{P}$ unendlich groß (undefiniert) ist. **[2pt]** *Tipp: Rechne für $\Delta\hat{P}$ im Impulsraum oder nehme an, dass $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \delta(x) f(x) = \frac{f(0)}{2}$ ist, wobei $\delta(x)$ die Dirac-Funktion ist, für die $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x) = \delta(x)$, $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, \delta(x) f(x) = f(0)$ gilt.*

Wir berechnen

$$\langle\psi| \hat{X}^2 |\psi\rangle = 2a \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^2 e^{-2ax} \tag{1.17}$$

Dies tun wir über

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^2 e^{-2ax} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-2ax} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\frac{1}{2a} = \frac{1}{4a^3}, \tag{1.18}$$

sodass

$$\langle\psi| \hat{X}^2 |\psi\rangle = \frac{1}{2a^2}. \tag{1.19}$$

Analog findet man

$$\langle\psi| \hat{X} |\psi\rangle = \frac{1}{2a}, \tag{1.20}$$

und damit

$$\Delta X = \sqrt{\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{4a^2}} = \frac{1}{2a}. \tag{1.21}$$

Für den Impuls ist der Beweis der Undefiniertheit in der Impulsdarstellung einfacher zu sehen. Zur Berechnung von $\Delta\hat{P}$ müssen wir unter anderem das Integral

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}p\, p^2 |\tilde{\psi}(p)|^2 \tag{1.22}$$

berechnen. Die ist mit der Wellenfunktion von Aufgabe $(d)$

$$\frac{a}{\pi\hbar}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}p\, \frac{p^2}{(i\frac{p}{\hbar}+a)(-i\frac{p}{\hbar}+a)} = \frac{a}{\pi\hbar}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}p\, \frac{p^2}{\frac{p^2}{\hbar^2}+a^2}. \tag{1.23}$$

Wir möchten zeigen, dass dieses Integral nicht konvergiert. Dafür ist für uns der Bereich von großen Impulsen wichtig, da wir auf jedem beschränkten Intervall ein Integral einer kontinuierlichen Funktion betrachten. Im Grunde reicht es zu sagen, dass wir für große $|p| \gg a\hbar$ den Integranden mit 1 approximieren können und wir dann eine konstante Funktion über ein unbeschränktes Intervall integrieren, was nicht konvergiert und damit unendlich ist. Genauer können wir für ein fixes $p_0$ mit $|p_0| > a\hbar$ schreiben, dass

$$\frac{p^2}{\frac{p^2}{\hbar^2} + a^2} > \frac{p_0^2}{\frac{p_0^2}{\hbar^2} + a^2}, \ \forall |p| > |p_0|, \tag{1.24}$$

also

$$\int_{p_0}^{\infty} \frac{p^2}{\frac{p^2}{\hbar^2} + a^2} > \int_{p_0}^{\infty} \frac{p_0^2}{\frac{p_0^2}{\hbar^2} + a^2} = \infty \tag{1.25}$$

Damit wissen wir, da der Integrand immer positiv ist, dass das Gesamtintegral divergiert, da schon ein Teilintegral divergiert. Weiterhin verschwindet der Erwartungswert

$$\langle\psi|\, \hat{P}\, |\psi\rangle = 0, \tag{1.26}$$

weil dieses Integral im Impulsraum proportional zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p}{\frac{p^2}{\hbar^2} + a^2} \tag{1.27}$$

ist, was ein Integral einer antisymmetrischen Funktion über ein symmetrisches Intervall ist, was verschwindet. Somit ist (formal) $\Delta P^2 = \infty - 0 = \infty$ und die Wellenfunktion hat unendliche Fluktuationen im Impuls.
Anmerkung: Eine mathematischere Formulierung dieses Ergebnisses ist, dass der Operator $\hat{P}$ unbeschränkt ist (er hat keine endliche Norm) und dadurch ist er nicht auf allen Vektoren wohldefiniert (er bildet nicht alle Vektoren in $L^2(\mathbb{R})$ auf Vektoren ab, was wir dadurch sehen, dass die Funktion $p\psi(p)$ keine endliche Norm hat, also nicht quadratintegrierbar ist, also auch kein Element in $L^2(\mathbb{R})$ ist. Der Vektor $|\psi\rangle$ ist nicht im Definitionsbereich von $\hat{P}$. Man kann also unendliche Fluktuationen damit vergleichen, dass der zugrundeliegende Zustand unter dem betrachteten Operator kein Bild im betrachteten Hilbertraum hat.

## 2 Deformationen der kanonischen Kommutatorrelation (4pt)

Betrachte die Heisenbergsche Unschärferelation. Für zwei Observablen $A$ und $B$ eines Quantensystems im Zustand $|\psi\rangle$ lautet die Unschärferelation:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\,\langle\psi|\, [A, B]\, |\psi\rangle\,|. \tag{2.1}$$

Im eindimensionalen Raum ist die übliche Kommutatorrelation zwischen Position $x$ und Impuls $p$ gegeben durch $[x, p] = i\hbar$. Daraus folgt die bekannte Unschärferelation $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$.

In einigen Modellen der Quantengravitation wird jedoch die Kommutatorrelation deformiert zu:

$$[x, p] = i\hbar \left(1 + \beta p^2\right), \tag{2.2}$$

wobei $\beta \geq 0$. Der Fall $\beta = 0$ entspricht hierbei der kanonischen Kommutatorrelation.

*Hinweis: Eine allgemeinere deformierte Kommutatorrelation würde auch einen $x^2$-Term enthalten, aber dieser wird in dieser Aufgabe nicht berücksichtigt.*

(a) Leite die Positions-Impuls Unschärferelation her, die auf der modifizierten Kommutatorrelation $[x, p] = i\hbar\left(1 + \beta p^2\right)$ basiert. **[1pt]**

Wir verwenden die allgemeine Unschärferelation für zwei Observablen $A$ und $B$. Für $A = x$ und $B = p$ erhalten wir

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}(1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta\langle p\rangle^2) \tag{2.3}$$

da

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\langle\psi|[x,p]|\psi\rangle| &= \frac{1}{2}|i\hbar||\langle\psi|(1+\beta p^2)|\psi\rangle| \\ = \frac{\hbar}{2}|\langle\psi|(1+\beta p^2)|\psi\rangle| &= \frac{\hbar}{2}\left(\langle\psi||\psi\rangle + \beta\langle\psi|p^2|\psi\rangle\right) \\ &= \frac{\hbar}{2}(1+\beta\langle p^2\rangle) \\ &= \frac{\hbar}{2}(1+\beta(\Delta p)^2 + \beta\langle p\rangle^2) \end{aligned} \tag{2.4}$$

(b) Zeichne die erlaubten Regionen in der $(\Delta x, \Delta p)$-Ebene basierend auf der modifizierten Unschärferelation mit einem Wert $\beta > 0$ und vergleiche dies mit dem Fall für $\beta = 0$. Bestimme für beide Fälle die Randkurven, die die Grenze zwischen dem erlaubten und dem verbotenen Bereich darstellen. Leite die Gleichung insbesondere für die Randkurve für $\beta > 0$ her:

$$\Delta p = \frac{\Delta x}{\hbar\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{1}{\beta} - \langle p\rangle^2} \tag{2.5}$$

**[2pt]**

Die Randkurve ist bestimmt, genau dann, wenn die Gleichung gilt. Fuer den Fall $\beta = 0$, koennen wir einfach $\Delta x\Delta p = \frac{\hbar}{2}$ umstellen zu

$$\Delta p = \frac{\hbar}{2\Delta x} \tag{2.6}$$

Fuer $\beta > 0$ stellen wir wie folgt um

$$\begin{aligned} \Delta x\Delta p &= \frac{\hbar}{2}(1+\beta(\Delta p)^2 + \beta\langle p\rangle^2) \\ \implies \frac{\hbar}{2}\beta(\Delta p)^2 - \Delta x\Delta p &+ \frac{\hbar}{2}(1+\beta\langle p\rangle^2) = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Das Ergebnis folgt als Loesung der quadratischen Gleichung. Eine Skizze davon befindet sich in Abbildung 1 aus Kempf, A. et al, "Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation." Physical Review D 52.2 (1995): 1108.

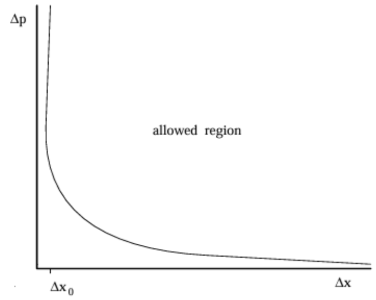



*Fig1: Modified uncertainty relation, implying a 'minimal length' $\Delta x_0 > 0$*

Weitere Details findest du ebenso in dieser Publikation.

(c) Basierend auf der Gleichung für die Randkurve in (b), bestimme den kleinsten möglichen Wert der Positionsunschärfe $\Delta x_0$ (bei $\langle p \rangle = 0$). **[1pt]**

Wir formen die Gleichung für die Randkurve mit $\langle p \rangle = 0$ nach $\Delta x$ um

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta p &= \frac{\hbar}{2}(1 + \beta(\Delta p)^2) \\ \implies \Delta x &= \frac{\hbar}{2\Delta p}(1 + \beta(\Delta p)^2) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Wie wir aus dem Plot oben entnehmen koennen, haben wir ein Minimum fuer $\Delta x$ als Funktion von $\Delta p$, was wir durch Differentiation bestimmen koennen. Betrachte $\tilde{x}(\tilde{p}) = \frac{\hbar}{2\tilde{p}}(1 + \beta \tilde{p}^2)$. Wir haben:

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{p}} = \frac{\hbar}{2}(-\tilde{p}^{-2} + \beta) \tag{2.9}$$

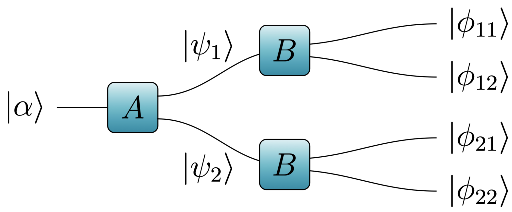
Wir fordern $\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{p}} = 0$ was impliziert $\tilde{p} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$. Dafuer erhalten wir $\tilde{x}(\frac{1}{\sqrt{\beta}}) = \frac{\hbar\sqrt{\beta}}{2}(1 + \frac{\beta}{\beta}) = \hbar\sqrt{\beta}$. Daher haben wir

$$\Delta x_0 = \hbar\sqrt{\beta} \tag{2.10}$$

Waehrend unter der kanonischen Kommutationsrelations, $\Delta x$ beliebig klein sein kann, solange $\Delta p$ entsprechend waechst, gibt es unter der modifizierten Kommutationsrelation eine Art minimale Laengenskala.

## 3 Messungen von Pauli-Observablen (5pt)

Wir betrachten den Zustand $|\alpha\rangle = \cos(\alpha/2)\,|0\rangle + \sin(\alpha/2)\,|1\rangle$ eines zweidimensionalen Systems, das wir in der folgenden Weise messen:




Die erste Messung $A$ sei $A = \sigma_z$, wobei $\sigma_z$ und $\sigma_x$ im Folgenden die aus der Vorlesung bekannten Pauli-Matrizen sind. Die Standardbasis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ist wie üblich die Eigenbasis von $\sigma_z$.

(a) Berechne die Varianz $(\Delta A)^2 = (\Delta\sigma_z)^2$ der ersten Messung. Für welche Werte von $\alpha$ verschwindet die Varianz? Kommentiere kurz das Ergebnis. **[1pt]**

Wir berechnen den Erwartungswert von $\sigma_z$ im Zustand $|\alpha\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle\alpha|\,\sigma_z\,|\alpha\rangle &= (\cos(\alpha/2)\,\langle 0| + \sin(\alpha/2)\,\langle 1|)\,\sigma_z\,(\cos(\alpha/2)\,|0\rangle + \sin(\alpha/2)\,|1\rangle) \\
&= (\cos(\alpha/2)\,\langle 0| + \sin(\alpha/2)\,\langle 1|)\,(\cos(\alpha/2)\,|0\rangle - \sin(\alpha/2)\,|1\rangle) \\
&= \cos^2(\alpha/2)\,\langle 0|0\rangle - \sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)(\langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle) - \sin^2(\alpha/2)\,\langle 1|1\rangle \\
&= \cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2) \\
&= \cos\alpha
\end{aligned}$$

Nachdem $\sigma_z^2 = 1$ und $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
(\Delta A)^2 &= (\Delta\sigma_z)^2 \\
&= \langle\alpha|\,\sigma_z^2\,|\alpha\rangle - \langle\alpha|\,\sigma_z\,|\alpha\rangle^2 \\
&= \langle\alpha|\alpha\rangle - \cos^2\alpha \\
&= 1 - \cos^2\alpha \\
&= \sin^2\alpha
\end{aligned}$$

Die Varianz verschwindet fuer $\alpha = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. In diesem Fall ist $|\alpha = n\pi\rangle = |1\rangle$ ein Eigenzustand von $A = \sigma_z$, was bedeutet, dass das Messergebnis von $\sigma_z$ sicher und ohne Unschärfe ist.

Nach der ersten Messung kann das System in zwei verschiedenen Zuständen sein, die wir $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ nennen. Diese Zustände messen wir jetzt ein zweites Mal mit der Observablen $B = \sigma_\theta = \cos(\theta)\sigma_z + \sin(\theta)\sigma_x$.

(b) In welchem Zustand befindet sich das System nach der zweiten Messung mit welcher Wahrscheinlichkeit? Berechne sowohl die Gesamtwahrscheinlichkeiten als auch die mit $|\psi_1\rangle$ oder $|\psi_2\rangle$ bedingten Wahrscheinlichkeiten. **[2pt]**

In der ersten Messung wird $\sigma_z$ gemessen – im Anschluss an diese Messung ist das System in einem der beiden Eigenzustände der Observablen, $|0\rangle$ und $|1\rangle$. Wir können also $|\psi_1\rangle = |0\rangle$ und $|\psi_2\rangle = |1\rangle$ wählen. Die Wahrscheinlichkeiten dafuer sind $P(|\psi_1\rangle \,|\, |\alpha\rangle) = \cos^2(\frac{\alpha}{2})$ und $P(|\psi_2\rangle \,|\, |\alpha\rangle) = \sin^2(\frac{\alpha}{2})$. Wenn jetzt die Observable $B$ gemessen wird, dann erhalten wir laut dem Messpostulat einen der Eigenwerte von $B$ als Messergebnis, und der Zustand des Systems im Anschluss an die Messung entspricht dem entsprechenden Eigenzustand von $B$. Wenn $|\varphi_i\rangle$ die Eigenzustände von $B$ sind, dann ist die Wahrscheinlichkeit, das System nach der Messung im Zustand $|\varphi_i\rangle$ zu finden, durch $P_{ij} = P\left(|\varphi_i\rangle \,\middle|\, |\psi_j\rangle\right) = |\langle\psi_j|\varphi_i\rangle|^2$ gegeben. $P_{ij}$ sind die *bedingten* Wahrscheinlichkeiten, gegeben den Zustand $|\psi_j\rangle$ nach der ersten Messung.
Wir müssen also

1. die Eigenzustände der Observablen $B$ bestimmen, um damit
2. die Wahrscheinlichkeiten $P_{ij}$ zu berechnen.

Die Eigenzustände von $B$ lassen sich z.B. auf dem üblichen Weg finden, indem wir für die Darstellungsmatrix

$$B = \sigma_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

die Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen. Die Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = \pm 1$, und die normierten Eigenvektoren

$$|\varphi_1\rangle = \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2(1+\cos(\theta)}} \begin{pmatrix} \frac{\cos(\theta)+1}{\sin(\theta)} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\varphi_2\rangle = \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2(1-\cos(\theta)}} \begin{pmatrix} \frac{\cos(\theta)-1}{\sin(\theta)} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Wir verwenden die trigonometrischen Identitaeten

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) \\ \cos(\theta) &= 1 - 2\sin^2(\theta/2) \\ 1+\cos(\theta) &= 2\cos^2(\theta/2) \\ 1-\cos(\theta) &= 2\sin^2(\theta/2) \end{aligned} \tag{3.3}$$

und koennen vereinfachen

$$|\varphi_1\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})\,|0\rangle + \sin(\frac{\theta}{2})\,|1\rangle \quad \text{und} \quad |\varphi_2\rangle = -\sin(\frac{\theta}{2})\,|0\rangle + \cos(\frac{\theta}{2})\,|1\rangle\,. \tag{3.4}$$

Zur Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_{ij}$ müssen wir nur noch diese Vektoren auf $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ projizieren und das Betragsquadrat berechnen:

$$P\left(|\varphi_1\rangle \,\middle|\, |\psi_1\rangle\right) = |\langle 0|\varphi_1\rangle|^2 = \cos^2(\frac{\theta}{2}) \tag{3.5}$$

$$P\left(|\varphi_2\rangle \,\middle|\, |\psi_1\rangle\right) = |\langle 0|\varphi_2\rangle|^2 = \sin^2(\frac{\theta}{2}) \tag{3.6}$$

$$P\left(|\varphi_1\rangle \,\middle|\, |\psi_2\rangle\right) = |\langle 1|\varphi_1\rangle|^2 = \sin^2(\frac{\theta}{2}) \tag{3.7}$$

$$P\left(|\varphi_2\rangle \,\middle|\, |\psi_2\rangle\right) = |\langle 1|\varphi_2\rangle|^2 = \cos^2(\frac{\theta}{2}) \tag{3.8}$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeiten ("Gegeben den Zustand $|\alpha\rangle$, wie wahrscheinlich ist es, das System nach den beiden Messungen im Zustand $|\varphi_i\rangle$ zu finden?") können wir mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit berechnen:

$$\begin{aligned} P_{\text{tot}}(|\varphi_1\rangle) &= P\left(|\varphi_1\rangle \,\middle|\, |\psi_1\rangle\right) P(|\psi_1\rangle \,|\, |\alpha\rangle) + P\left(|\varphi_1\rangle \,\middle|\, |\psi_2\rangle\right) P(|\psi_2\rangle \,|\, |\alpha\rangle) \\ &= P\left(|\varphi_1\rangle \,\middle|\, |\psi_1\rangle\right) \cos^2(\alpha/2) + P\left(|\varphi_1\rangle \,\middle|\, |\psi_2\rangle\right) \sin^2(\alpha/2) \\ &= \cos^2(\frac{\theta}{2}) \cos^2(\frac{\alpha}{2}) + \sin^2(\frac{\theta}{2}) \sin^2(\frac{\alpha}{2}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{tot}}(|\varphi_2\rangle) &= P\left(|\varphi_2\rangle \,\middle|\, |\psi_1\rangle\right) P(|\psi_1\rangle \,|\, |\alpha\rangle) + P\left(|\varphi_2\rangle \,\middle|\, |\psi_2\rangle\right) P(|\psi_2\rangle \,|\, |\alpha\rangle) \\ &= P\left(|\varphi_2\rangle \,\middle|\, |\psi_1\rangle\right) \cos^2(\alpha/2) + P\left(|\varphi_2\rangle \,\middle|\, |\psi_2\rangle\right) \sin^2(\alpha/2) \\ &= \sin^2(\frac{\theta}{2}) \cos^2(\frac{\alpha}{2}) + \cos^2(\frac{\theta}{2}) \sin^2(\frac{\alpha}{2}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Die Wahrscheinlichkeiten fuer die vier unterschiedlichen Pfade lauten

$$\begin{aligned} P(|\psi_1\rangle, |\varphi_1\rangle) = P(|\varphi_1\rangle \,|\, |\psi_1\rangle) P(|\psi_1\rangle) &= \cos^2(\frac{\theta}{2}) \cos^2(\frac{\alpha}{2}) \\ P(|\psi_1\rangle, |\varphi_2\rangle) = P(|\varphi_2\rangle \,|\, |\psi_1\rangle) P(|\psi_1\rangle) &= \sin^2(\frac{\theta}{2}) \cos^2(\frac{\alpha}{2}) \\ P(|\psi_2\rangle, |\varphi_1\rangle) = P(|\varphi_1\rangle \,|\, |\psi_2\rangle) P(|\psi_2\rangle) &= \cos^2(\frac{\theta}{2}) \sin^2(\frac{\alpha}{2}) \\ P(|\psi_2\rangle, |\varphi_2\rangle) = P(|\varphi_2\rangle \,|\, |\psi_2\rangle) P(|\psi_2\rangle) &= \sin^2(\frac{\theta}{2}) \sin^2(\frac{\alpha}{2}) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Jetzt vertauschen wir die Reihenfolge der beiden Messungen $A$ und $B$: Wir messen zuerst $\sigma_\theta$ und dann $\sigma_z$.

(c) Berechne erneut die Gesamtwahrscheinlichkeiten und die bedingten Wahrscheinlichkeiten für alle vier möglichen Zustände nach der zweiten Messung und vergleiche die Ergebnisse mit denen aus Aufgabenteil (b). **[2pt]**

Nun wird in der ersten Messung $\sigma_\theta$ gemessen. Das System ist somit in einem Eigenzustand von $\sigma_\theta$, also entweder in $|\varphi_1\rangle$ oder $|\varphi_2\rangle$. Die Wahrscheinlichkeiten dafuer sind

$$\begin{aligned} P(|\varphi_1\rangle \,|\, |\alpha\rangle) = |\langle\alpha|\varphi_1\rangle|^2 &= |\cos(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\alpha}{2})|^2 \\ &= \cos^2(\frac{\theta - \alpha}{2}) \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} P(|\varphi_2\rangle \,|\, |\alpha\rangle) = |\langle\alpha|\varphi_2\rangle|^2 &= |-\sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2}) + \cos(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\alpha}{2})|^2 \\ &= |\sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2}) - \cos(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\alpha}{2})|^2 \\ &= \sin^2(\frac{\theta - \alpha}{2}) \end{aligned} \tag{3.13}$$

nachdem $\cos{(x-y)} = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ und $\sin{(x-y)} = \sin x \cos y - \cos x \sin y$. Dann wird die Observable $\sigma_z$ gemessen, also der Zustand kollabiert auf einen Eigenzustand, also $|\psi_1\rangle = |0\rangle$ oder $|\psi_2\rangle = |1\rangle$. Das System nach der Messung im Zustand $|\psi_i\rangle$ zu finden gegeben $|\varphi_j\rangle$ ist $P_{ij} = P(|\psi_i\rangle \,|\, |\varphi_j\rangle) = |\langle\varphi_j|\psi_i\rangle|^2$. Wir haben, aehnlich wie vorhin, die Wahrscheinlichkeiten

$$P\left(|\psi_1\rangle \,\middle|\, |\varphi_1\rangle\right) = |\langle\varphi_1|\psi_1\rangle|^2 = |\langle\varphi_1|0\rangle|^2 = \cos^2{(\frac{\theta}{2})} \tag{3.14}$$

$$P\left(|\psi_2\rangle \,\middle|\, |\varphi_1\rangle\right) = |\langle\varphi_1|\psi_2\rangle|^2 = |\langle\varphi_1|1\rangle|^2 = \sin^2{(\frac{\theta}{2})} \tag{3.15}$$

$$P\left(|\psi_1\rangle \,\middle|\, |\varphi_2\rangle\right) = |\langle\varphi_2|\psi_1\rangle|^2 = |\langle\varphi_2|0\rangle|^2 = \sin^2{(\frac{\theta}{2})} \tag{3.16}$$

$$P\left(|\psi_2\rangle \,\middle|\, |\varphi_2\rangle\right) = |\langle\varphi_2|\psi_2\rangle|^2 = |\langle\varphi_2|1\rangle|^2 = \cos^2{(\frac{\theta}{2})} \tag{3.17}$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeiten sind somit

$$\begin{aligned}
P_{\text{tot}}(|\psi_1\rangle) &= P\left(|\psi_1\rangle \,\middle|\, |\varphi_1\rangle\right) P(|\varphi_1\rangle \,|\, |\alpha\rangle) + P\left(|\psi_1\rangle \,\middle|\, |\varphi_2\rangle\right) P(|\varphi_2\rangle \,|\, |\alpha\rangle) && (3.18)\\
&= P\left(|\psi_1\rangle \,\middle|\, |\varphi_1\rangle\right) \cos^2{(\frac{\theta-\alpha}{2})} + P\left(|\psi_1\rangle \,\middle|\, |\varphi_2\rangle\right) \sin^2{(\frac{\theta-\alpha}{2})} && (3.19)\\
&= \cos^2{(\frac{\theta}{2})} \cos^2{(\frac{\theta-\alpha}{2})} + \sin^2{(\frac{\theta}{2})} \sin^2{(\frac{\theta-\alpha}{2})} && (3.20)\\
P_{\text{tot}}(|\psi_2\rangle) &= P\left(|\psi_2\rangle \,\middle|\, |\varphi_1\rangle\right) P(|\varphi_1\rangle \,|\, |\alpha\rangle) + P\left(|\psi_2\rangle \,\middle|\, |\varphi_2\rangle\right) P(|\varphi_2\rangle \,|\, |\alpha\rangle) && (3.21)\\
&= P\left(|\psi_2\rangle \,\middle|\, |\varphi_1\rangle\right) \cos^2{(\frac{\theta-\alpha}{2})} + P\left(|\psi_2\rangle \,\middle|\, |\varphi_2\rangle\right) \sin^2{(\frac{\theta-\alpha}{2})} && (3.22)\\
&= \sin^2{(\frac{\theta}{2})} \cos^2{(\frac{\theta-\alpha}{2})} + \cos^2{(\frac{\theta}{2})} \sin^2{(\frac{\theta-\alpha}{2})} && (3.23)
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeiten fuer die vier unterschiedlichen Pfade lauten

$$\begin{aligned}
P(|\varphi_1\rangle, |\psi_1\rangle) &= P(|\psi_1\rangle \,|\, |\varphi_1\rangle) P(|\varphi_1\rangle) = \cos^2{(\frac{\theta}{2})} \cos^2{(\frac{\theta-\alpha}{2})}\\
P(|\varphi_2\rangle, |\psi_1\rangle) &= P(|\psi_1\rangle \,|\, |\varphi_2\rangle) P(|\varphi_2\rangle) = \sin^2{(\frac{\theta}{2})} \sin^2{(\frac{\theta-\alpha}{2})}\\
P(|\varphi_1\rangle, |\psi_2\rangle) &= P(|\psi_2\rangle \,|\, |\varphi_1\rangle) P(|\varphi_1\rangle) = \sin^2{(\frac{\theta}{2})} \cos^2{(\frac{\theta-\alpha}{2})}\\
P(|\varphi_2\rangle, |\psi_2\rangle) &= P(|\psi_2\rangle \,|\, |\varphi_2\rangle) P(|\varphi_2\rangle) = \cos^2{(\frac{\theta}{2})} \sin^2{(\frac{\theta-\alpha}{2})}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Wir sehen, dass die Wahrscheinlichkeiten verschieden sind in der anderen Reihenfolge in (b). Dies illustriert, dass die Reihenfolge von Messungen entscheidend, wie hier mit nichtkommutierenden Operatoren $\sigma_z$ und $\sigma_\theta$ ist in der Quantenmechanik, nachdem der Messprozess im Allgemeinen destruktiv ist.

## 4 Tensorprodukt (11pt)

Der Zustandsraum eines Quantensystems mit mehreren Freiheitsgraden ist durch das Tensorprodukt der Hilberträume der einzelnen Freiheitsgrade gegeben. Im Folgenden

wollen wir uns mit der Konstruktion solcher Tensorräume befassen.
Sei $\mathcal{H}_1$ ein $d$-dimensionaler Hilbertraum mit Basis $B_1 = \{|i\rangle_1\}_{i=1}^d$ und $\mathcal{H}_2$ ein weiterer $D$-dimensionaler Hilbertraum mit Basis $B_2 = \{|j\rangle_2\}_{i=1}^D$.
Man konstruiert einen neuen Vektorraum $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ in dem man die Menge von Tupeln $B_1 \times B_2 = \{(|i\rangle_1, |j\rangle_2) : |i\rangle_1 \in B_1, |j\rangle_2 \in B_2\}$ als Basis benutzt. Man schreibt anstelle von $(|i\rangle_1, |j\rangle_2)$ meist $|i\rangle|j\rangle$ oder $|i,j\rangle$ oder $|i\rangle \otimes |j\rangle$. Letztere Schreibweise lässt sich zu einer bilinearen Verknüpfung $\times : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ durch

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle := \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{D} \langle i|\psi\rangle \langle j|\phi\rangle |i,j\rangle \tag{4.1}$$

erweitern.

(a) Welche Dimension hat der Vektorraum $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$? Gib einen Hilbertraum an, der ein System aus $n$ Spin-1/2-Teilchen beschreibt, welche Dimension hat dieser? (Mit Begründung.) **[2pt]**

Die Basis von $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ hat $d \cdot D$ Elemente von Tupeln, daher ist die Dimension des Vektorraums

$$\dim(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) = \dim(\mathcal{H}_1) \cdot \dim(\mathcal{H}_2) = d \cdot D \tag{4.2}$$

Fuer einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Dimension $d$ folgt somit fuer $\mathcal{H}^{\otimes n}$ eine Dimension $d^n$.
Ein Spin-1/2 Teilchen wird beschrieben (vernachlaessige andere Freiheitsgrade) durch $\mathcal{H}_{s=1/2} = \mathbb{C}^2$. Die Dimension ist $d = 2$. Der Hilbertraum von $n$ solchen Teilchen ist daher gegeben durch das Tensorprodukt $(\mathcal{H}_{s=1/2})^{\otimes n} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes n} = \mathbb{C}^{2^n}$. Die Dimension ist $d^n = 2^n$.

(b) Zeige, dass die oben definierte Verknüpfung $\otimes : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ linear in beiden Argumenten ist. **[2pt]**

Wir schauen uns die Linearkombinationen an. Die Funktion $\otimes : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ist bilinear, wenn wir Linearitaet in beiden Argumenten zeigen, d.h.

$$\begin{aligned} \otimes(a_1|\psi_1\rangle + a_2|\psi_2\rangle, |\phi\rangle) &= (a_1|\psi_1\rangle + a_2|\psi_2\rangle) \otimes |\phi\rangle = a_1|\psi_1\rangle \otimes |\phi\rangle + a_2|\psi_2\rangle \otimes |\phi\rangle \\ \otimes(|\psi\rangle, b_1|\phi_1\rangle + b_2|\phi_2\rangle) &= |\psi\rangle \otimes (b_1|\phi_1\rangle + b_2|\phi_2\rangle) = b_1|\psi\rangle \otimes |\phi_1\rangle + b_2|\psi\rangle \otimes |\phi_2\rangle \end{aligned} \tag{4.3}$$

wobei $a_{1,2}, b_{1,2} \in \mathbb{C}$ und $|\psi\rangle, |\psi_{1,2}\rangle \in \mathcal{H}_1$ und $|\phi\rangle, |\phi_{1,2}\rangle \in \mathcal{H}_2$. Wir zeigen zunaechst

Linearitaet im ersten Argument:

$$
\begin{aligned}
(a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle) \otimes |\phi\rangle &:= \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{D} \langle i| (a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle) \langle j|\phi\rangle |i,j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{D} (a_1 \langle i|\psi_1\rangle + a_2 \langle i|\psi_2\rangle) \langle j|\phi\rangle |i,j\rangle \\
&= a_1 \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{D} \langle i|\psi_1\rangle \langle j|\phi\rangle |i,j\rangle + a_2 \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{D} \langle i|\psi_2\rangle \langle j|\phi\rangle |i,j\rangle \\
&=: a_1 |\psi_1\rangle \otimes |\phi\rangle + a_2 |\psi_2\rangle \otimes |\phi\rangle
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

sowie im zweiten Argument

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle \otimes (b_1 |\phi_1\rangle + b_2 |\phi_2\rangle) &:= \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{D} \langle i|\psi\rangle \langle j| (b_1 |\phi_1\rangle + b_2 |\phi_2\rangle) |i,j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{D} \langle i|\psi\rangle (b_1 \langle j|\phi_1\rangle + b_2 \langle j|\phi_2\rangle) |i,j\rangle \\
&= b_1 \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{D} \langle i|\psi\rangle \langle j|\phi_1\rangle + b_2 \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{D} \langle i|\psi\rangle \langle j|\phi_2\rangle |i,j\rangle \\
&=: b_1 |\psi\rangle \otimes |\phi_1\rangle + b_2 |\psi\rangle \otimes |\phi_2\rangle
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

(c) Ist $\otimes : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ surjektiv? (Mit Begründung.) **[2pt]**

Die Abbildung $\otimes : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ mit

$$
|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle := \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{D} \langle i|\psi\rangle \langle j|\phi\rangle |i,j\rangle \tag{4.6}
$$

hat zwei Argumente; $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d} a_i |i\rangle \in \mathcal{H}_1$ mit $a_i = \langle i|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle = \sum_{j=1}^{D} b_j |j\rangle \in \mathcal{H}_2$ mit $b_j = \langle j|\phi\rangle$. Surjektivität bedeutet, dass jedes Element $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ als ein Bild eines Paares $(|\psi\rangle, |\phi\rangle) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ unter der Abbildung $\otimes$ dargestellt werden kann. Nachdem $|i\rangle$ und $|j\rangle$ die Basiselemente von den einzelnen Hilbertraeumen beschreiben, ist ein gemeinsames Basiselement von $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ also $|i\rangle \otimes |j\rangle$. Ein generelles Element $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ kann somit als eine Linearkombination ueber all diese Basiselemente geschrieben werden

$$
|\Phi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{D} c_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle, \qquad c_{ij} \in \mathbb{C} \tag{4.7}
$$

Wir sehen daher, dass $|\Phi\rangle$ im Allgemeinen nicht als Bild eines Paares $(|\psi\rangle, |\phi\rangle) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ geschrieben werden kann. Die Abbildung ist daher nicht surjektiv. Die Bilder der Abbildung sind nur eine Teilmenge von $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, naemlich die der Tensorproduktzustaende. Diese sind spezielle Zustaende mit $c_{ij} = a_i b_j$ mit $a_i = \langle i|\psi\rangle$ und $b_j = \langle j|\phi\rangle$. Damit haben wir

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{D} c_{ij}\,|i\rangle \otimes |j\rangle &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{D} a_i b_j\,|i\rangle \otimes |j\rangle \\ &= \left(\sum_{i=1}^{d} a_i\,|i\rangle\right)\left(\sum_{j=1}^{D} a_i b_j \otimes |j\rangle\right) \\ &= |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle\end{aligned} \tag{4.8}$$

Wir wollen an dieser Stelle einen (puren) Quantenzustand schreiben, der sich nicht als Tensorproduktzustand darstellen laesst. Sei $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Wir schreiben zwei allgemeine Zustaende $|\psi\rangle = a_1|0\rangle + a_2|1\rangle \in \mathbb{C}^2_1$ and $|\phi\rangle = b_1|0\rangle + b_2|1\rangle \in \mathbb{C}^2_2$. Wir beweisen mittels Widerspruch und nehmen an, dass $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ existieren, sodass $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |\Phi^+\rangle$. Wir setzen ein

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = (a_1|0\rangle + a_2|1\rangle)(b_1|0\rangle + b_2|1\rangle) = a_1 b_1|00\rangle + a_1 b_2|01\rangle + a_2 b_1|10\rangle + a_2 b_2|11\rangle \tag{4.9}$$

Damit $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |\Phi^+\rangle$, verlangen wir $a_1 b_2 = a_2 b_1 = 0$. Ohne Verlust der Allgemeinheit sei $b_2 = 0$, sodass $a_1 b_2 = 0$. Damit $|\phi\rangle$ ein normierter Vektor ist, muss also $b_1 \neq 0$, woraus folgt, dass $a_2 = 0$. Dann haben wir $|\psi\rangle = a_1|0\rangle \equiv |0\rangle$ und somit $a_1 = 1$ und $|\phi\rangle = b_1|0\rangle \equiv |0\rangle$ und somit $b_1 = 1$. Damit haben wir allerdings $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |00\rangle \neq |\Phi^+\rangle$. Wir haben somit einen Widerspruch. $|\Phi^+\rangle$ kann somit nicht als Tensorproduktzustand geschrieben werden.

Der Dualraum eines Vektorraums $\mathcal{H}$ ist $\mathcal{H}^* := \{\langle\psi| : \mathcal{H} \to \mathbb{C}, \text{linear}\}$. $\mathcal{H}_1^*$ hat die zu $B_1$ duale Basis $\{\langle i|\}_{i=1}^d$, definiert durch die Orthonormalitätsrelation $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$. Der Dualraum hat selbst die Struktur eines Vektorraums.

(d) Gib eine orthonormale Basis des Dualraums von $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ an. **[1pt]**

$\mathcal{H}_1^*$ hat die zu $B_1$ duale Basis $B_1^* = \{\langle i|\}_{i=1}^d$, definiert durch $\langle i|i'\rangle = \delta_{ii'}$ und $\mathcal{H}_2^*$ hat die zu $B_2$ duale Basis $B_2^* = \{\langle j|\}_{j=1}^D$ definiert durch $\langle j|j'\rangle = \delta_{jj'}$. Eine Basis des Dualraums von $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, i.e. $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)^* = \mathcal{H}_1^* \otimes \mathcal{H}_2^*$, ist $\{(\langle i|, \langle j|) : \langle i| \in B_1^*, \langle j| \in B_2^*\}$. Wir koennen auch schreiben $\langle i| \otimes \langle j| = \langle i, j|$ aehnlich wie in der Verknuepfung von vorhin, jetzt mit Orthonormalitaetsrelation $\langle i, j|i', j'\rangle = \delta_{ii', jj'}$.

(e) Definiere ein kanonisches Skalarprodukt für den Dualraum. Zeige, dass der Dualraum damit ein Hilbertraum ist. (Zur Vollständigkeit reicht ein kurzer Kommentar.) **[2pt]** Sei $V$ ein Vektorraum und $V^*$ der Dualvektorraum. Für jedes $l \in V^*$ existiert ein eindeutiges $u \in V$, sodass $l = \langle u|\cdot\rangle$ ist. Wir nennen dieses ab jetzt $l_u$.

Nun gilt:

$$\langle l_u | l_v \rangle_{V^*} = \langle u | v \rangle_V \,. \tag{4.10}$$

Also induziert ein Skalarprodukt auf $V$ ein Skalarprodukt auf $V^*$. Wenn $V$ ein Hilbertraum ist, dann gilt durch die obige Identifikation auch das $V^*$ ein Hilbertraum ist.

Es gibt eine kanonische Identifikation von Vektoren in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1^*$ mit Operatoren von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_1$ auf die folgende Weise: Betrachte $A = |i\rangle \langle j| \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1^*$. $A$ lässt sich als Operator auffassen, wobei $A |\psi\rangle = |i\rangle \langle j| |\psi\rangle$. Dies ist so naheliegend, dass Physiker normalerweise nicht darüber reden. Es erlaubt beliebige Operatoren $A$ bezüglich der Basis $O' = \{|i\rangle \langle j|\,, 1 \leq i,j \leq d\}$ zu entwickeln:

$$A = \sum_{i,j=1}^{d} \langle i| A |j\rangle \, |i\rangle \langle j| =: \sum_{i,j=1}^{d} A_{i,j} \, |i,j\rangle \tag{4.11}$$

Die Koeffizientenmatrix $(A_{ij})$ wird auch als darstellende Matrix des Operators $A$ bezüglich der Basis $O'$ bezeichnet.
Da wir das Tensorprodukt beliebiger Vektorräume definiert haben, verstehen wir auch was mit dem Tensorprodukt zweier Operatoren $AB \in (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1^*) \otimes (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1^*)$ gemeint ist. $A \otimes B$ kann wiederum als Operator auf $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$ aufgefasst werden. Überlege, wie dies im Detail funktioniert!

(f) Zeige, dass für alle Operatoren $A, B, C : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ und Vektoren $|\phi\rangle\,, |\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$ die folgenden Rechenregeln gelten:

(i) $(A \otimes B)(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle) = (A\,|\phi\rangle) \otimes (B\,|\psi\rangle)$

(ii) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$

**[2pt]**

Sei $A, B$ Vektoren in $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1^*)$. Dann ist $A \otimes B = AB$ ein Vektor in $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1^*) \otimes (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1^*)$. Gleicherweise sind $A, B$ Operatoren von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_1$. Damit ist $A \otimes B$ ein Operator von $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$.

Wir expandiren $A, B$ in einer Basis (Gl. 4.11) und $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ ebenso (Gl. 4.1):

$$
\begin{aligned}
(A \otimes B)(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle) &= \left(\sum_{i,j=1}^{d} A_{ij} |i\rangle \langle j|\right) \otimes \left(\sum_{k,l=1}^{d} B_{k,l} |k\rangle \langle l|\right) \sum_{m=1}^{d} \sum_{n=1}^{d} \langle m|\phi\rangle \langle n|\psi\rangle |m, n\rangle \\
&= \sum_{i,j,k,l,m,n=1}^{d} A_{i,j} B_{k,l} \phi_m \psi_n (|i\rangle \langle j|) \otimes (|k\rangle \langle l|) |m, n\rangle \\
&= \sum_{i,j,k,l,m,n=1}^{d} A_{i,j} B_{k,l} \phi_m \psi_n (|i\rangle \langle j|) \otimes (|k\rangle \langle l|)(|m\rangle \otimes |n\rangle) \\
&= \sum_{i,j,k,l,m,n=1}^{d} A_{i,j} B_{k,l} \phi_m \psi_n (|i\rangle \langle j|m\rangle) \otimes (|k\rangle \langle l|n\rangle) \\
&= \sum_{i,j,k,l,m,n=1}^{d} A_{i,j} B_{k,l} \phi_m \psi_n |i, k\rangle \delta_{jm} \delta_{ln} \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{d} A_{i,j} B_{k,l} \phi_j \psi_l |i, k\rangle \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{d} A_{i,j} \phi_j |i\rangle \otimes B_{k,l} \psi_l |k\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} A_{i,j} \phi_j |i\rangle \otimes \sum_{k,l=1}^{d} B_{k,l} \psi_l |k\rangle \\
&= (A |\phi\rangle) \otimes (B |\psi\rangle)
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$