1 Zeitentwicklung für ein Zweiniveausystem (5pt)

Wir betrachten das mittlerweile gut bekannte Zweiniveausystem, beschrieben durch den Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. In dieser Aufgabe werden wir die zeitabhängige Schrödingergleichung lösen, um zu berechnen, wie sich der Zustand des Systems als Funktion der Zeit verändert.
Die Dynamik eines Quantensystems ist durch den Hamiltonoperator bestimmt. Hier betrachten wir

$$H = \omega\sigma_y, \tag{1.1}$$

wobei $\omega \in \mathbb{R}$ und σ_y die übliche Pauli-Y-Matrix ist.

(a) Löse die zeitabhängige Schrödingergleichung und schreibe den zeitentwickelten Zustand des Systems damit in der Form

$$|\psi(t)\rangle = a_0(t)\,|0\rangle + a_1(t)\,|1\rangle\,. \tag{1.2}$$

Nutze als Anfangsbedingung, dass der Zustand zum Zeitpunkt $t = 0$ durch $|\psi_0\rangle = |0\rangle$ gegeben ist. Die Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ sind wie gewohnt die Eigenzustände von σ_z.
Tipp: Die Schrödingergleichung lässt sich explizit als System von zwei Differentialgleichungen für a_0 und a_1 lösen. Ihr könnt jedoch auch die Inhalte der Vorlesung und Übungsblatt 2 verwenden. **[2pt]**

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von σ_z zum Zeitpunkt t das Messergebnis -1 zu erhalten? In welchem Zustand befindet sich das System unmittelbar nach der Messung? **[1pt]**

(c) Berechne den Erwartungswert $\langle\sigma_z\rangle_{\psi(t)} = \langle\psi(t)|\sigma_z|\psi(t)\rangle$. **[1pt]**

(d) In der Vorlesung wurde auch das Heisenberg-Bild eingeführt: In diesem Bild sind es nicht die Zustände, die sich in der Zeit entwickeln, sondern die Observablen. Dabei ist die Zeitentwicklung einer Observablen A gegeben durch $A(t) = U^\dagger(t)AU(t)$, mit dem Zeitentwicklungsoperator $U(t) = \exp(-iHt/\hbar)$.

   1. Berechne die zeitentwickelte Observable $\sigma_z(t) = e^{iHt/\hbar}\sigma_z e^{-iHt/\hbar}$. **[0.5pt]**
   2. Berechne den Erwartungswert $\langle\sigma_z(t)\rangle_{\psi_0} = \langle\psi_0|\sigma_z(t)|\psi_0\rangle$ und vergleiche das Ergebnis mit (c). **[0.5pt]**

2 Teilchen im Potentialtopf (5pt)

Betrachte einen ein-dimensionalen, ∞-tiefen Potentialtopf der Breite a, dargestellt als das Intervall $0 \le x \le a$. Der Hamiltonoperator H wirkt auf $L^2([0,a])$ zwischen 0 und x als:

$$H\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi, \tag{2.1}$$

und 0 außerhalb des Intervalls.

(a) Finde die Energieeigenzustände und zugehörigen Energieeigenwerte des Hamiltonoperators eines Potentialtopfs der Breite a. **[2pt]**.
Hinweis: Eigenzustände sind normiert. Welche Randbedingungen gelten für die Eigenfunktionen?

(b) Das Teilchen befinde sich im Eigenzustand tiefster Energie (Grundzustand) des Topfs der Breite $a/2$. Zu einer bestimmten Zeit werde die rechte Wand plötzlich von $x = a/2$ nach $x = a$ verschoben.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass danach das Teilchen im ersten angeregten Zustand, bzw. im Grundzustand des Potentialtopfs der Breite a ist. **[1,5pt]**
Hinweis: Der Zustand ist unmittelbar nach der Verschiebung noch derselbe.

(c) Bleibt der Erwartungswert der Energie des Teilchens bei der plötzlichen Änderung erhalten? Berechne auch die Varianz der Energie. **[1,5pt]**

3 Teilchen auf einem Ring (5pt)

In Aufgabe 2 hast du ein Teilchen in einem eindimensional Potentialtopf untersucht. Wir wollen weiters ein freies Teilchen betrachten, aber mit anderen Randbedingungen.

Betrachte ein Teilchen der Masse m auf einem eindimensionalen Ring mit dem Umfang a, dargestellt durch das Intervall $0 \leq x < a$. Die Punkte $x = 0$ und $x = a$ sind dabei identifiziert, sodass die Wellenfunktion die periodische Randbedingung erfüllt:

$$\Psi(x) = \Psi(x + a) \tag{3.1}$$

Die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen auf dem Ring lautet

$$H\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi \tag{3.2}$$

(a) Die Schrödingergleichung hat Lösungen der Form $\Psi(x) = Ae^{ikx}$, wobei k die Wellenzahl ist. Bestimme die zulässigen Energieeigenwerte. **[1,5pt]**

(b) Normiere die Wellenfunktion. **[0,5pt]**

(c) Vergleiche die in Teil (a) gefundenen Energieeigenwerte mit denen eines Teilchens in einem eindimensionalen Potentialtopf der Breite a. Was ist anders? Diskutiere. **[1pt]**

(d) Berechne Δx und Δp im Zustand $\Psi(x)$. Diskutiere Heisenbergs Unschärferelation. **[2pt]**

4 Ein Kommutator-Rätsel (5pt)

In den vorherigen Übungen haben wir die *kanonische Kommutatorrelation* kennengelernt, die der Heisenbergschen Unschärferelation zugrunde liegt: $[x, p] = i\hbar$.

Wir haben ebenfalls gelernt, dass x und p in der Quantenmechanik Hermitesche Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ sind. Allgemein sollten wir die Kommutatorrelation also in der Form

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\mathbb{I} \tag{4.1}$$

schreiben, wobei $\mathbb{I}$ die Identität beschreibt und wir uns per Notation deutlich machen, dass $\hat{x}$ und $\hat{p}$ Operatoren sind.

(a) Wir nehmen an, dass $\mathcal{H}$ eine endliche Dimension d hat, sodass wir Operatoren auf $\mathcal{H}$ als $d \times d$ Matrizen darstellen können. Zeige, dass die Kommutatorrelation 4.1 in diesem Fall nicht erfüllt sein kann. **[1pt]**
Tipp: Erinnert euch an die Definition und Eigenschaften der Spur einer Matrix.

(b) In Übungsblatt 1 hatten wir bereits das Konzept von beschränkten Operatoren kennengelernt: Ein linearer Operator A ist beschränkt, wenn seine Operatornorm $\|A\|$ endlich ist.
Zeige, dass zwei Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$, welche die Kommutatorrelation 4.1 erfüllen, nicht beide beschränkt sein können. **[3pt]**
Tipp: Startet mit der Identität $[p^n, x] = -i\hbar n p^{n-1}$ (siehe Aufgabe 5, Übungsblatt 2 für eine Herleitung).

(c) Interpretiere kurz die Ergebnisse aus (a) und (b) – was lernen wir daraus über $\hat{x}$, $\hat{p}$ und $\mathcal{H}$? **[1pt]**