1 Nullpunktsenergie und die Unschärferelation (4pt)

In der Vorlesung wurden die Eigenzustände $|n\rangle$ des Hamilton-Operators $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ des harmonischen Oszillators eingeführt. Im Folgenden könnt ihr nutzen, dass die Zustände $\{|n\rangle\}$ eine orthonormale Basis bilden, sowie die Definitionen der Erzeuger- und Vernichteroperatoren $a^\dagger, a$:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}(a + a^\dagger), \quad p = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}(a - a^\dagger)$$
$$a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,, \quad a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,, \quad a^\dagger a\,|n\rangle = n\,|n\rangle$$

(a) Berechne die Erwartungswerte $\langle x\rangle = \langle n|x|n\rangle$ und $\langle p\rangle = \langle n|p|n\rangle$ von Ort und Impuls in den Eigenzuständen $|n\rangle$. **[1pt]**

(b) Berechne analog zu (a) die Varianzen $(\Delta x)^2$ und $(\Delta p)^2$, und daraus das Unschärfeprodukt $\Delta x \Delta p$. **[2pt]**

(c) Berechne mithilfe des Ergebnisses aus (b) die Energie $E = \langle H\rangle$. Was ist der minimale Wert von E, der mit der Unschärferelation vereinbar ist? **[1pt]**

2 Erwartungswerte im Harmonischen Oszillator (5pt)

Im folgenden betrachtet ihr einen Harmonischen Oszillator mit Erzeuger und Vernichteroperatoren $a, a^\dagger$ und der Basis $|n\rangle$ aus Aufgabe 1. Betrachtet die folgenden Operatoren

$$V_0 = a^\dagger a^\dagger a, \tag{1}$$
$$V_1 = a^\dagger a a, \tag{2}$$
$$V_2 = a^\dagger a^\dagger a^\dagger a a. \tag{3}$$

(a) Berechne die Matrixelemente

$$\langle m|\, V_0\,|n\rangle\,, \langle m|\, V_1\,|n\rangle\,, \langle m|\, V_2\,|n\rangle \tag{4}$$

für alle nicht-negativen ganzen Zahlen $n, m \geq 0$. **[3pt]**

(b) Betrachte die Verallgemeinerung von den Operatoren aus (a):

$$V_{l,k} = (a^\dagger)^l a^k, \tag{5}$$

wobei $l, k \geq 0$ ganze Zahlen sind und berechne $\langle m|\, V_{l,k}\,|n\rangle$ für alle nicht-negativen ganzen Zahlen $n, m \geq 0$. **[2pt]**

Tipp: Es reicht den Fall $l \geq k$ zu betrachten, da $V_{l,k} = V_{k,l}^\dagger$

3 Partnerpotentiale (6pt)

Betrachte die beiden Hamiltonoperatoren auf $L^2(\mathbb{R})$:

$$H_\pm = -\frac{d^2}{dx^2} + q^2(x) \pm \frac{dq}{dx} \tag{6}$$

für eine reele Funktion $q(x)$.
Die Hamiltonoperatoren $H_\pm$ bilden ein sogenanntes supersymmetrisches Paar. Die Supersymmetrie ist "ungebrochen", falls $\lambda = 0$ ein Eigenwert eines der beiden Hamiltonoperatoren ist. (Was Supersymmetrie genau ist, ist für diese Aufgabe nicht relevant.)

(a) Zeige, dass $H_\pm$ positiv semi-definit ist. **[1,5pt]**
Hinweis: Bringe den Hamiltonoperator in die Form $H_\pm = 2a_\pm^\dagger a_\pm$, wobei $a_\pm$ ein Vernichtungsoperator ist. Für welche Funktion $q(x)$ ist der Hamiltonoperator mit dem harmonischen Oszillator verwandt?
Ein selbst-adjungierter Operator $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist *positiv semi-definit*, wenn für alle $\Psi \in \mathcal{H}$: $\langle \Psi | A | \Psi \rangle \geq 0$ gilt.

(b) Zeige, dass die beiden Partner Potentiale haben mit denselben Eigenwerten λ mit der möglichen Ausnahme von $\lambda = 0$. **[1pt]**

(c) Zeige, dass $\lambda = 0$ nur der Eigenwert eines der beiden Hamiltonoperatoren ist. Wie muss $q(x)$ aussehen, damit $\lambda = 0$ ein Eigenwert ist? Und für welchen Partner? Zeige außerdem: Die Antwort ändert sich nicht, wenn $q(x)$ auf einem beschränkten Intervall geändert wird. **[1,5pt]**
Hinweis: Drücke allfällige Eigenfunktionen $\Psi_\pm$ für $\lambda = 0$ durch eine Stammfunktion $Q(x)$ von $q(x)$ aus. Die Antwort spiegelt sich dann in der Eigenschaft von $Q(x)$ wieder.

(d) Beschreibe in Worten die Partnerpotentiale für $q(x) = x + gx^2$, wo g als klein angenommen werden kann. Zeige, dass $H_\pm$ für $g \neq 0$ unitär äquivalent ist. Was passiert im Fall $g \to 0$ im Bezug auf die Antwort bei Teil (*c*)?. Was bedeutet das für die Brechung der Supersymmetrie? **[1pt]**

Hinweis: Für g klein, beschreiben die Partnerpotentiale $q(x) = x + gx^2$ je einen Doppeltopf. Die gesuchte unitäre Transformation ist eine Spiegelung um $x_0 = -\frac{1}{2}g$.

(e) Eine Verallgemeinerung der Hamiltonoperatoren auf den Fall $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist:

$$H_\pm = -\Delta + \mathbf{q}(\mathbf{x})^2 \pm \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}) \tag{7}$$

Eigenschaften (a-c) gelten dank kleinsten Anpassungen der Herleitung im Fall $n = 1$. Zeige bloss: Ein notwendiges Kriterium dafür, dass $\lambda = 0$ ein Eigenwert von H_+ oder H_- ist, ist, dass $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{q}(\mathbf{x})$ ist (also $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ ist ein Gradientenfeld). **[1pt]**

4 Harmonischer Oszillator im Heisenberg-Bild (6pt)

Der Hamilton-Operator eines harmonischen Oszillators ist

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \tag{8}$$

mit Kommutationsrelation $[x, p] = i\hbar 1$.

(a) In der Vorlesung habt ihr zunächst das Schrödinger-Bild kennengelernt, in dem Zustände zeitabhängig sind und Operatoren zeitunabhängig. Wir betrachten nun das Heisenberg-Bild, in dem Zustände nun zeitunabhängig sind und Operatoren zeitabhängig. Operatoren $A(t)$ sind also nun zeitabhängig $A(t) = [U^\dagger(t, t_0)AU(t, t_0)]$, wobei $U(t, t_0)$ ein unitärer Zeitentwicklungsoperator ist; und Zustände zeitunabhängig $|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle$. Leite die Heisenbergsche Bewegungsgleichung her (H ist zeitunabhängig):

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, A(t)] \tag{9}$$

[2pt]

(b) Berechne mithilfe der Heisenbergschen Bewegungsgleichung $x(t)$ und $p(t)$ für den harmonischen Oszillator und drücke das Ergebnis durch die Anfangswerte $x(0)$ und $p(0)$ aus. [Es sei $t_0 = 0$.] Mache eine Skizze. **[2pt]**

(c) Drücke den Hamilton-Operator durch Leiteroperatoren a und $a^\dagger$ mit Kommutationsrelation $[a, a^\dagger] = 1$. aus. Drücke dadurch $a(t)$ und $a^\dagger(t)$ durch $a \equiv a(0)$ und $a^\dagger \equiv a^\dagger(0)$ aus. **[1pt]**

(d) Berechne nun die Kommutationsrelationen der zeitabhängigen Operatoren $[x(0), x(t)]$, $[x(0), p(t)]$ und $[p(0), p(t)]$. **[1pt]**