

1 Nullpunktsenergie und die Unschärferelation (4pt)

In der Vorlesung wurden die Eigenzustände $|n\rangle$ des Hamilton-Operators $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ des harmonischen Oszillators eingeführt. Im Folgenden könnt ihr nutzen, dass die Zustände $\{|n\rangle\}$ eine orthonormale Basis bilden, sowie die Definitionen der Erzeuger- und Vernichterooperatoren $a^\dagger, a$:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}(a + a^\dagger), \quad p = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}(a - a^\dagger)$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$$

- (a) Berechne die Erwartungswerte $\langle x \rangle = \langle n|x|n\rangle$ und $\langle p \rangle = \langle n|p|n\rangle$ von Ort und Impuls in den Eigenzuständen $|n\rangle$. **[1pt]**

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \langle n|x|n\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}} \langle n|(a + a^\dagger)|n\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}} \left(\langle n|a|n\rangle + \langle n|a^\dagger|n\rangle \right) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}} \left(\sqrt{n}\langle n|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle \right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

nachdem $\{|n\rangle\}$ orthonormal sind. Durch das gleiche Argument haben wir auch $\langle p \rangle = \langle n|p|n\rangle = 0$.

- (b) Berechne analog zu (a) die Varianzen $(\Delta x)^2$ und $(\Delta p)^2$, und daraus das Unschärfeprodukt $\Delta x \Delta p$. **[2pt]**

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \langle n|x^2|n\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2\omega m} \langle n|(a + a^\dagger)(a + a^\dagger)|n\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2\omega m} \langle n|(a^2 + a^{\dagger 2} + a^\dagger a + aa^\dagger)|n\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2\omega m} \left(\langle n|a^2|n\rangle + \langle n|a^{\dagger 2}|n\rangle + \langle n|(a^\dagger a + aa^\dagger)|n\rangle \right) \\ &= \frac{\hbar}{2\omega m} \left(\langle n|a^2|n\rangle + \langle n|a^{\dagger 2}|n\rangle + \langle n|(2a^\dagger a + 1)|n\rangle \right) \\ &= \frac{\hbar}{2\omega m} (2n + 1) \end{aligned} \tag{2}$$

nachdem $a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle$ und $aa^\dagger = [a, a^\dagger] + a^\dagger a$ mit $[a, a^\dagger] = 1$. Analog,

$$\begin{aligned}
 \langle p^2 \rangle &= \langle n | p^2 | n \rangle \\
 &= -\frac{\hbar\omega m}{2} \langle n | (a - a^\dagger)(a - a^\dagger) | n \rangle \\
 &= -\frac{\hbar\omega m}{2} \langle n | (a^2 + a^{\dagger 2} - a^\dagger a - aa^\dagger) | n \rangle \\
 &= -\frac{\hbar\omega m}{2} \left(\langle n | a^2 | n \rangle + \langle n | a^{\dagger 2} | n \rangle - \langle n | (a^\dagger a + aa^\dagger) | n \rangle \right) \\
 &= \frac{\hbar\omega m}{2} \left(\langle n | (2a^\dagger a + 1) | n \rangle \right) \\
 &= \frac{\hbar\omega m}{2} (2n + 1)
 \end{aligned} \tag{3}$$

Die Varianzen sind somit

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\hbar}{2\omega m} (2n + 1) \tag{4}$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{\hbar\omega m}{2} (2n + 1) \tag{5}$$

Aus $\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m} (2n + 1)}$ und $\Delta p = \sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2} (2n + 1)}$, folgt somit das Unschärfeprodukt $\Delta x \Delta p$:

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} (2n + 1) \tag{6}$$

- (c) Berechne mithilfe des Ergebnisses aus (b) die Energie $E = \langle H \rangle$. Was ist der minimale Wert von E , der mit der Unschärferelation vereinbar ist? **[1pt]**

Die Energie ist

$$\begin{aligned}
 E &= \langle H \rangle \\
 &= \left\langle \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \right\rangle \\
 &= \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle + \frac{1}{2} m \omega^2 \langle x^2 \rangle \\
 &= \frac{1}{2m} \frac{\hbar\omega m}{2} (2n + 1) + \frac{1}{2} m \omega^2 \frac{\hbar}{2\omega m} (2n + 1) \\
 &= \frac{\hbar\omega}{2} (2n + 1) \\
 &= \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{7}$$

Die Unschärferelation lautet

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{8}$$

was erfüllt wird durch $n = 0$, der minimale Wert von E ist dabei ebenso $\frac{\hbar\omega}{2}$.

2 Erwartungswerte im Harmonischen Oszillator (5pt)

Im folgenden betrachtet ihr einen Harmonischen Oszillator mit Erzeuger und Vernichteroperatoren $a, a^\dagger$ und der Basis $|n\rangle$ aus Aufgabe 1. Betrachtet die folgenden Operatoren

$$V_0 = a^\dagger a^\dagger a, \quad (9)$$

$$V_1 = a^\dagger a a, \quad (10)$$

$$V_2 = a^\dagger a^\dagger a^\dagger a a. \quad (11)$$

(a) Berechne die Matrixelemente

$$\langle m | V_0 | n \rangle, \langle m | V_1 | n \rangle, \langle m | V_2 | n \rangle \quad (12)$$

für alle nicht-negativen ganzen Zahlen $n, m \geq 0$. **[3pt]**

Wir wissen von Aufgabe 1, dass gilt

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (13)$$

also haben wir durch wiederholte Anwendung dieser Identitäten

$$\begin{aligned} \langle m | V_0 | n \rangle &= \langle m | a^\dagger a^\dagger a | n \rangle \\ &= \sqrt{n} \langle m | a^\dagger a^\dagger | n-1 \rangle \\ &= \sqrt{n^2} \langle m | a^\dagger | n \rangle \\ &= n \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} \end{aligned} \quad (14)$$

Analog kann man die anderen beiden Erwartungswerte ausrechnen und man findet

$$\langle m | V_1 | n \rangle = (n-1) \sqrt{n} \delta_{m,n-1}, \quad \langle m | V_2 | n \rangle = (n-1)n \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} \quad (15)$$

(b) Betrachte die Verallgemeinerung von den Operatoren aus (a):

$$V_{l,k} = (a^\dagger)^l a^k, \quad (16)$$

wobei $l, k \geq 0$ ganze Zahlen sind und berechne $\langle m | V_{l,k} | n \rangle$ für alle nicht-negativen ganzen Zahlen $n, m \geq 0$. **[2pt]**

Tipp: Es reicht den Fall $l \geq k$ zu betrachten, da $V_{l,k} = V_{k,l}^\dagger$

Sei $l \geq k$. Analog zur vorherigen Aufgabe berechnen wir

$$\langle m | V_{l,k} | n \rangle = \langle m | (a^\dagger)^l a^k | n \rangle \quad (17)$$

Über Induktion finden wir

$$a^k |n\rangle = \sqrt{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)} |n-k\rangle = \sqrt{\frac{n!}{(n-k)!}} |n-k\rangle. \quad (18)$$

Da $a^\dagger$ der adjungierte Operator von a ist, wissen wir

$$\langle m | a^\dagger = \sqrt{m} \langle m-1 |, \quad (19)$$

somit wissen wir wieder über Induktion, dass

$$\langle m | (a^\dagger)^l = \sqrt{\frac{m!}{(m-l)!}} \langle m-l |. \quad (20)$$

Zusammensetzen der letzten Gleichungen ergibt

$$\langle m | V_{l,k} | n \rangle = \sqrt{\frac{m!n!}{(m-l)!(n-k)!}} \delta_{m,n-k+l}. \quad (21)$$

3 Partnerpotentiale (6pt)

Betrachte die beiden Hamiltonoperatoren auf $L^2(\mathbb{R})$:

$$H_\pm = -\frac{d^2}{dx^2} + q^2(x) \pm \frac{dq}{dx} \quad (22)$$

für eine reelle Funktion $q(x)$.

Die Hamiltonoperatoren $H_\pm$ bilden ein sogenanntes supersymmetrisches Paar. Die Supersymmetrie ist "ungebrochen", falls $\lambda = 0$ ein Eigenwert eines der beiden Hamiltonoperatoren ist. (Was Supersymmetrie genau ist, ist für diese Aufgabe nicht relevant.)

(a) Zeige, dass $H_\pm$ positiv semi-definit ist. [1,5pt]

Hinweis: Bringe den Hamiltonoperator in die Form $H_\pm = 2a_\pm^\dagger a_\pm$, wobei $a_\pm$ ein Vernichtungsoperator ist. Für welche Funktion $q(x)$ ist der Hamiltonoperator mit dem harmonischen Oszillator verwandt?

Ein selbst-adjungierter Operator $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ist *positiv semi-definit*, wenn für alle $\Psi \in \mathcal{H}$: $\langle \Psi | A | \Psi \rangle \geq 0$ gilt.

Wir wenden $H_\pm$ auf eine Wellenfunktion Ψ an:

$$\begin{aligned} H_\pm \Psi &= \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q^2 \pm \frac{dq}{dx} \right) \Psi \\ &= \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q^2 \pm \frac{dq}{dx} \pm q \frac{d}{dx} \mp q \frac{d}{dx} \right) \Psi \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} \Psi + q^2 \Psi \pm \frac{dq}{dx} \Psi \pm q \frac{d\Psi}{dx} \mp q \frac{d\Psi}{dx} \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} \Psi + q^2 \Psi \pm \frac{d}{dx} (q\Psi) \mp q \frac{d\Psi}{dx} \\ &= \left(\frac{d}{dx} \pm q(x) \right) \left(-\frac{d}{dx} \pm q(x) \right) \Psi \\ &\equiv 2a_\pm^\dagger a_\pm \Psi \end{aligned} \quad (23)$$

wobei wir definiert haben

$$a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dx} \pm q(x) \right), \quad a_{\pm}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} \pm q(x) \right) \quad (24)$$

Somit haben wir $H_{\pm} = 2a_{\pm}^{\dagger}a_{\pm}$. Definiere nun

$$a = a_{-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dx} - q(x) \right), \quad a^{\dagger} = a_{-}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} - q(x) \right) \quad (25)$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} [a, a^{\dagger}]\Psi &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dx} - q(x) \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} - q(x) \right) \right] \Psi \\ &= \frac{-1}{2} \left[\frac{d}{dx} + q, \frac{d}{dx} - q \right] \Psi \\ &= \frac{-1}{2} \left(-\left[\frac{d}{dx}, q \right] \Psi + \left[q, \frac{d}{dx} \right] \Psi \right) \\ &= \frac{-1}{2} \left(-\frac{d}{dx}(q\Psi) + q\frac{d\Psi}{dx} + q\frac{d\Psi}{dx} - \frac{d}{dx}(q\Psi) \right) \\ &= \frac{d}{dx}(q\Psi) - q\frac{d\Psi}{dx} \\ &= \frac{dq}{dx}\Psi \\ &\implies [a, a^{\dagger}] = \frac{dq}{dx} \end{aligned} \quad (26)$$

Es folgt $H_{-} = 2a_{-}^{\dagger}a_{-} = 2a^{\dagger}a$. Somit haben wir

$$H_{+} = H_{-} + 2\frac{dq}{dx} \quad (27)$$

$$= 2(a^{\dagger}a + \frac{dq}{dx}) \quad (28)$$

$$= 2(a^{\dagger}a + [a, a^{\dagger}]) \quad (29)$$

$$= 2aa^{\dagger} \quad (30)$$

Die Hamiltonoperatoren sind positiv semidefinit, da für alle $\Psi \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\langle \Psi | H_{+} | \Psi \rangle = 2\|a\Psi\|^2 \geq 0 \quad (31)$$

$$\langle \Psi | H_{-} | \Psi \rangle = 2\|a^{\dagger}\Psi\|^2 \geq 0. \quad (32)$$

Der harmonische Oszillator entspricht im Wesentlichen dem Spezialfall $q(x) = x$. Dann gilt:

$$H_{\pm} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \pm 1. \quad (33)$$

- (b) Zeige, dass die beiden Partner Potentiale haben mit denselben Eigenwerten λ mit der möglichen Ausnahme von $\lambda = 0$. **[1pt]**

Sei $H_- |\Psi\rangle = \lambda |\Psi\rangle$. Wir müssen jetzt eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ finden. Betrachte nun $|\Phi\rangle = a |\Psi\rangle$;

$$H_+ |\Phi\rangle = 2aa^\dagger a |\Psi\rangle = a(2a^\dagger a) |\Psi\rangle = aH_- |\Psi\rangle = a\lambda |\Psi\rangle = \lambda a |\Psi\rangle = \lambda |\Phi\rangle. \quad (34)$$

Also ist für $\lambda \neq 0$, $|\Phi\rangle$ in jedem Fall eine Eigenfunktion von H_+ . Es gilt: $\|a\Psi\|^2 = \langle \Psi | a^\dagger a | \Psi \rangle = \lambda \|\Psi\|^2$. Falls $\lambda = 0$ gelten würde, dann würde $\|a|\Psi\rangle\| = 0$, also $a|\Psi\rangle = 0$.

Die beiden Partner haben also Potentiale mit denselben Eigenwerten λ (abgesehen von $\lambda = 0$). Für den umgekehrten Fall, also $H_+ |\Psi\rangle = \lambda \Psi$ folgt das Argument mit $\Phi = a^\dagger |\Psi\rangle$.

- (c) Zeige, dass $\lambda = 0$ nur der Eigenwert eines der beiden Hamiltonoperatoren ist. Wie muss $q(x)$ aussehen, damit $\lambda = 0$ ein Eigenwert ist? Und für welchen Partner? Zeige außerdem: Die Antwort ändert sich nicht, wenn $q(x)$ auf einem beschränkten Intervall geändert wird. **[1,5pt]**

Hinweis: Drücke allfällige Eigenfunktionen $\Psi_\pm$ für $\lambda = 0$ durch eine Stammfunktion $Q(x)$ von $q(x)$ aus. Die Antwort spiegelt sich dann in der Eigenschaft von $Q(x)$ wieder.

Aus $H_- |\Psi\rangle = 0$ (also der Eigenwert $\lambda = 0$), folgt (siehe (b)) $a|\Psi\rangle = 0$. Dann gilt also:

$$\frac{d\Psi}{dx} + q(x)\Psi = 0. \quad (35)$$

Eine Lösung ist (Separationsansatz):

$$\Psi \sim e^{-Q(x)}, \quad (36)$$

wobei $Q(x)$ eine Stammfunktion von $q(x)$ ist. Wir erhalten die Gleichung $q(x) = \frac{dQ}{dx}$, which means $Q(x) = \int q(x)dx + A$. Die Funktion $e^{-Q(x)}$ ist eine Eigenfunktion, falls sie Element von $L^2(\mathbb{R})$ ist. Aus $H_+ |\Phi\rangle = 0$, folgt mittels identischer Argumentation $\Phi \sim e^{Q(x)}$ mit $Q(x) = -\int q(x)dx + B$. Also ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von $H_\pm$ genau dann falls $e^{\pm Q(x)}$ eine quadratintegrierbare Funktion ist.

Falls beide quadratintegrierbar wären, so würde das innere Produkt $\langle \Psi | \Phi \rangle$ endlich sein, dies ist aber nicht der Fall:

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx e^{-Q(x)} e^{Q(x)} = \infty \quad (37)$$

gelten. Es kann also nur eine der beiden Eigenfunktionen quadrat-integrierbar sein.

- (d) Beschreibe in Worten die Partnerpotentiale für $q(x) = x + gx^2$, wo g als klein angenommen werden kann. Zeige, dass $H_{\pm}$ für $g \neq 0$ unitär äquivalent ist. Was passiert im Fall $g \rightarrow 0$ im Bezug auf die Antwort bei Teil (c)? Was bedeutet das für die Brechung der Supersymmetrie? **[1pt]**

Die Potentiale sind:

$$q^2(x) \pm q'(x) = x^2(1 + gx)^2 \pm (1 + 2gx) \quad (38)$$

Für $g \neq 0$ klein beschreiben sie Doppeltöpfe mit lokalen Minima nahe $x = 0$ und $x = -\frac{1}{g}$. Welches das absolute Minimum ist hängt vom Vorzeichen $\pm$ ab. Unter der Spiegelung um $x_0 = -\frac{1}{2g}$ ist $x - x_0 \rightarrow -(x - x_0)$, also $x \rightarrow -x - \frac{1}{g}$. Damit gilt:

$$1 + 2gx \rightarrow -(1 + 2gx). \quad (39)$$

Für den unitären Operator gilt nun angewendet auf eine Wellenfunktion:

$$(U\Psi)(x) = \Psi(-x - 1/g). \quad (40)$$

Damit gilt:

$$U^\dagger H_+ U = H_-. \quad (41)$$

Daraus folgt, dass $\lambda = 0$ ein Eigenwert von beiden $H_{\pm}$ ist oder von keinem von beiden. Aus (c) folgt dann das keiner Eigenwert $\lambda = 0$ besitzt.

Im Fall $g = 0$, haben wir wieder einen harmonischen Oszillator, dann ist $Q(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$ und es existiert eine quadratintegrierbare Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda = 0$. Der Übergang zu $g \neq 0$ bricht die Supersymmetrie.

Hinweis: Für g klein, beschreiben die Partnerpotentiale $q(x) = x + gx^2$ je einen Doppeltopf. Die gesuchte unitäre Transformation ist eine Spiegelung um $x_0 = -\frac{1}{2g}$.

- (e) Eine Verallgemeinerung der Hamiltonoperatoren auf den Fall $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist:

$$H_{\pm} = -\Delta + \mathbf{q}(\mathbf{x})^2 \pm \nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}) \quad (42)$$

Eigenschaften (a-c) gelten dank kleinsten Anpassungen der Herleitung im Fall $n = 1$. Zeige bloss: Ein notwendiges Kriterium dafür, dass $\lambda = 0$ ein Eigenwert von H_+ oder H_- ist, ist, dass $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{q}(\mathbf{x})$ ist (also $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ ist ein Gradientenfeld). **[1pt]** Jetzt ist $a_i = q_i + \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $a_i^\dagger = q_i - \frac{\partial}{\partial x_i}$. Nun gilt auch:

$$\sum_i^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, q_i \right] = \nabla \cdot \mathbf{q}. \quad (43)$$

Also gilt auch $H_+ = \sum_i a_i^\dagger a_i$ und $H_- = \sum_i a_i a_i^\dagger$. Damit $\lambda = 0$ ein Eigenwert ist, muss nur $a_i |\Psi\rangle = 0$ gelten für alle i . Das ist gleichbedeutend mit:

$$\nabla \Psi + \mathbf{q} \Psi = 0. \quad (44)$$

Also ist $\mathbf{q} = -\nabla \cdot \log(\Psi)$ und somit ein Gradientenfeld.

4 Harmonischer Oszillator im Heisenberg-Bild (6pt)

Der Hamilton-Operator eines harmonischen Oszillators ist

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad (45)$$

mit Kommutationsrelation $[x, p] = i\hbar 1$.

- (a) In der Vorlesung habt ihr zunächst das Schrödinger-Bild kennengelernt, in dem Zustände zeitabhängig sind und Operatoren zeitunabhängig. Wir betrachten nun das Heisenberg-Bild, in dem Zustände nun zeitunabhängig sind und Operatoren zeitabhängig. Operatoren $A(t)$ sind also nun zeitabhängig $A(t) = [U^\dagger(t, t_0)AU(t, t_0)]$, wobei $U(t, t_0)$ ein unitärer Zeitentwicklungsoperator ist; und Zustände zeitunabhängig $|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle$. Leite die Heisenbergsche Bewegungsgleichung her (H ist zeitunabhängig):

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, A(t)] \quad (46)$$

[2pt]

Aus der Vorlesung wissen wir

$$i\hbar \frac{dU(t, t_0)}{dt} = HU(t, t_0) \quad (47)$$

und somit

$$-i\hbar \frac{dU^\dagger(t, t_0)}{dt} = U^\dagger(t, t_0)H \quad (48)$$

Nach der Produktregel haben wir daher

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(U^\dagger(t, t_0)AU(t, t_0) \right) \\ &= \frac{dU^\dagger(t, t_0)}{dt}AU(t, t_0) + U^\dagger(t, t_0)A\frac{dU(t, t_0)}{dt} \\ &= \frac{i}{\hbar}U^\dagger(t, t_0)HAU(t, t_0) + U^\dagger(t, t_0)A\frac{-i}{\hbar}HU(t, t_0) \\ &= \frac{i}{\hbar} \left(U^\dagger(t, t_0)HAU(t, t_0) - U^\dagger(t, t_0)AHU(t, t_0) \right) \\ &= \frac{i}{\hbar} \left(U^\dagger(t, t_0)HU(t, t_0)U^\dagger(t, t_0)AU(t, t_0) - U^\dagger(t, t_0)AU(t, t_0)U^\dagger(t, t_0)HU(t, t_0) \right) \\ &= \frac{i}{\hbar} (HA(t) - A(t)H) \\ &= \frac{i}{\hbar} [H, A(t)] \end{aligned} \quad (49)$$

nachdem $U^\dagger(t, t_0)HU(t, t_0) = H$.

- (b) Berechne mithilfe der Heisenbergschen Bewegungsgleichung $x(t)$ und $p(t)$ für den harmonischen Oszillator und drücke das Ergebnis durch die Anfangswerte $x(0)$ und $p(0)$ aus. [Es sei $t_0 = 0$.] Mache eine Skizze. **[2pt]**

Die Kommutatoren sind

$$\begin{aligned}
 [H, x(t)] &= \frac{1}{2m} [p(t)^2, x(t)] \\
 &= \frac{1}{m} (p(t)[p(t), x(t)]) \\
 &= \frac{1}{m} (p(t)(-i\hbar)) \\
 &= -i\hbar \frac{p(t)}{m}
 \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
 [H, p(t)] &= \frac{m\omega^2}{2} [x(t)^2, p(t)] \\
 &= m\omega^2 (x(t)[x(t), p(t)]) \\
 &= m\omega^2 (x(t)(i\hbar)) \\
 &= i\hbar m\omega^2 x(t)
 \end{aligned} \tag{51}$$

Die Bewegungsgleichungen sind somit

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{p(t)}{m} \tag{52}$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = -m\omega^2 x(t) \tag{53}$$

Durch erneutes Differenzieren der ersten Gleichung und zweiten Gleichung sehen wir

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t) \tag{54}$$

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} = -\omega^2 p(t) \tag{55}$$

Die Lösungen dieser harmonischen Oszillorgleichungen sind

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \tag{56}$$

$$p(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t) \tag{57}$$

Durch einmalige Differentiation sehen wir die folgende Bedingungen hinsichtlich der Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{p(t)}{m} \\
 -\omega (A \sin(\omega t) - B \cos(\omega t)) &= \frac{1}{m} (C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)) \\
 \implies C &= m\omega B, \quad D = -m\omega A
 \end{aligned} \tag{58}$$

Dann fordern wir $x(t=0) = x(0)$ und $p(t=0) = p(0)$:

$$A = x(0), \quad C = p(0) \implies B = \frac{p(0)}{m\omega}, \quad D = -m\omega x(0) \quad (59)$$

Somit sind die Lösungen der Bewegungsgleichung

$$x(t) = \cos(\omega t)x(0) + \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t)p(0) \quad (60)$$

$$p(t) = \cos(\omega t)p(0) - m\omega \sin(\omega t)x(0) \quad (61)$$

Die Bewegung kann als Kreisrotation im Phasenraum dargestellt werden.

- (c) Drücke den Hamilton-Operator durch Leiteroperatoren a und $a^\dagger$ mit Kommutationsrelation $[a, a^\dagger] = 1$. aus. Drücke dadurch $a(t)$ und $a^\dagger(t)$ durch $a \equiv a(0)$ und $a^\dagger \equiv a^\dagger(0)$ aus. **[1pt]**

Wie in der Vorlesung besprochen können wir x und p ausdrücken durch

$$x = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} (a + a^\dagger) \quad (62)$$

$$p = -i \left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right)^{1/2} (a - a^\dagger) \quad (63)$$

mit $[a, a^\dagger] = 1$. Oder anders gesagt:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}x + i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}p \right) \quad (64)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}x - i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}p \right) \quad (65)$$

Dann erhält man

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (66)$$

Für zeitabhängige Operatoren $x(t)$ und $p(t)$ haben wir nun

$$x(t) = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} (a(t) + a^\dagger(t)) \quad (67)$$

$$p(t) = -i \left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right)^{1/2} (a(t) - a^\dagger(t)) \quad (68)$$

oder anders gesagt:

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}x(t) + i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}p(t) \right) \quad (69)$$

$$a^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega} x(t) - i \frac{1}{\sqrt{m\omega}} p(t) \right) \quad (70)$$

Wir setzen nun die Lösungen der Bewegungsgleichungen ein für $x(t), p(t)$ und setzen dann die Ausdrücke für $x = x(0)$ und $p = p(0)$ durch $a, a^\dagger$ ein:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega} x(t) + i \frac{1}{\sqrt{m\omega}} p(t) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega} \left[\cos(\omega t) x + \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t) p \right] + i \frac{1}{\sqrt{m\omega}} [\cos(\omega t) p - im\omega \sin(\omega t) x] \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega} [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] x + i \frac{1}{\sqrt{m\omega}} [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] p \right) \\ &= e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega} x + i \frac{1}{\sqrt{m\omega}} p \right) \\ &= e^{-i\omega t} a \end{aligned} \quad (71)$$

Demnach

$$a^\dagger(t) = e^{i\omega t} a^\dagger \quad (72)$$

- (d) Berechne nun die Kommutationsrelationen der zeitabhängigen Operatoren $[x(0), x(t)]$, $[x(0), p(t)]$ und $[p(0), p(t)]$. **[1pt]**

Wir kennen die Kommutationsrelationen zur gleichen Zeit. Wir verwenden die bisherigen Resultate um zu berechnen:

$$\begin{aligned} [x(0), x(t)] &= [x(0), \cos(\omega t)x(0) + \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t)p(0)] \\ &= \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t) [x(0), p(0)] = \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t) i\hbar 1 \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} [x(0), p(t)] &= [x(0), \cos(\omega t)p(0) - m\omega \sin(\omega t)x(0)] \\ &= \cos(\omega t) [x(0), p(0)] = \cos(\omega t) i\hbar 1 \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} [p(0), p(t)] &= [p(0), \cos(\omega t)p(0) - m\omega \sin(\omega t)x(0)] \\ &= -m\omega \sin(\omega t) [p(0), x(0)] = im\hbar\omega \sin(\omega t) 1 \end{aligned} \quad (75)$$