1 Schwinger Oszillator (5+5pt)

(a) Betrachte zwei unabhängige harmonische Oszillatoren $a_\pm$. Sei $J_\pm = \hbar a^\dagger_\pm a_\mp$, $J_z = \frac{\hbar}{2}\left(a^\dagger_+ a_+ - a^\dagger_- a_-\right)$ und $\hat{N} = a^\dagger_+ a_+ + a^\dagger_- a_-$. **[2pt]**
Erkläre in Worten, was die Observablen N, J_z beschreiben sollen. Zeige:

$$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm \tag{1}$$
$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z. \tag{2}$$

Tipp: Da a_+, a_- unabhängig sind, gilt $[a_+, a_-] = 0$ und analog für die adjungierten $a^\dagger_+$ (kurz: + kommutiert mit −). Hilfreich ist die Identität

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B. \tag{3}$$

Betrachte als Beispiel

$$\begin{aligned}[a^\dagger_+ a^\dagger_-, a_-] &= a^\dagger_+[a^\dagger_-, a_-] + [a^\dagger_+, a_-]a^\dagger_- \\ &= a^\dagger_+[a^\dagger_-, a_-] + 0 \cdot a^\dagger_- \\ &= -a^\dagger_+,\end{aligned} \tag{4}$$

wobei wir in der letzten Gleichung $[a_-, a^\dagger_-] = 1$ und die Kommutativität von a_+, a_- nutzten.

(b) Wir definieren $\hat{\mathbb{J}}^2 = J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+)$. Zeige, dass $\mathbb{J}^2 = \frac{\hbar^2}{2}\hat{N}\left(\frac{\hat{N}}{2} + 1\right)$ gilt. Was misst die Observable $\hat{\mathbb{J}}^2$? Zeige: $[J_z, \mathbb{J}^2] = 0$. **[1pt]**

(c) Wir nummerieren die Basis des gesamten Systems mit $|n_+, n_-\rangle = |n_+\rangle \otimes |n_-\rangle$ in den Zuständen des Gesamtsystems. Zeige:

$$J_+ |n_+, n_-\rangle = \hbar\sqrt{n_-(n_+ + 1)}\, |n_+ + 1, n_- - 1\rangle \tag{5}$$
$$J_- |n_+, n_-\rangle = \hbar\sqrt{n_+(n_- + 1)}\, |n_+ - 1, n_- + 1\rangle \tag{6}$$
$$J_z |n_+, n_-\rangle = \frac{\hbar}{2}(n_+ - n_-)\, |n_+, n_-\rangle \tag{7}$$

Was gilt also für den Operator $\hat{N}$? Nutze, das um zu begründen, dass man die Zustände $|n_+, n_-\rangle$ nummerieren kann mit $j = \frac{1}{2}(n_+ + n_-)$ und $m = \frac{1}{2}(n_+ - n_-)$. Zeige, dass nun gilt:

$$|j, m\rangle = \frac{(a^\dagger_+)^{j+m}(a^\dagger_-)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}\, |0, 0\rangle \tag{8}$$

[2pt]

(d) Wir können eine Rotationsmatrix aufteilen, indem wir eine Rotation durch die Eulerwinkel darstellen: $R(\psi,\theta,\phi) = R_z(\psi)R_y(\theta)R_z(\phi)$. Wie wirkt eine Rotation $R_z = e^{i\frac{\phi}{\hbar}J_z}$ auf $|j,m\rangle$?
Es genügt also $R_y = e^{i\frac{\theta}{\hbar}J_y}$ zu betrachten. Zeige:

$$R_y(\theta)a^\dagger_\pm R_y(\theta)^{-1} = \cos(\theta/2)a^\dagger_\pm \mp \sin(\theta/2)a^\dagger_\mp. \tag{9}$$

[+2pt] *Hinweis*: Beachte $J_y = \frac{\hbar}{2i}(a^\dagger_+ a_- - a^\dagger_- a_+)$. Nutze die Lie'sche Formel! (https://de.wikipedia.org/wiki/Baker-Campbell-Hausdorff-Formel)

(e) Berechne $R_y(\theta)\,|j,m\rangle$. Drücke das Resultat aus durch:

$$R_y(\theta)\,|j,m\rangle = \sum_{m'} d^j_{m,m'}(\theta)\,|j,m'\rangle\,, \tag{10}$$

wo man $d^j_{m,m'}$ bestimmen muss. Das Resultat ist:

$$d^j_{m,m'} = \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}\times$$
$$\sum_k \frac{\cos(\theta/2)^{2j-2k-m+m'}\sin(\theta/2)^{2k+m-m'}(-1)^k}{k!(m-m'+k)!(j-m-k)!(j+m'-k)!},$$

wo $\max(0, m'-m) \leq k \leq \min(j-m, j+m')$. **[+3pt]**

2 Hermitepolynome [5pt]

Ihr habt in der Vorlesung die Wellenfunktion des Harmonischen Oszillators über die Hermite-polynome ausgedrückt.

$$\psi_n(x) = (2^n n!\sqrt{\pi}x_0)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{x_0})^2} H_n(\frac{x}{x_0}), \tag{11}$$

wobei $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega m}}$ und H_n das n-te Hermite-polynom sind. Nehme im Folgenden ohne Beweis an, dass gilt

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \tag{12}$$

(a) Berechne basierend auf der obigen Identität (12) (oder unter Nutzung der Gleichung für ψ_n aus dem Skript) mit der Annahme $H_0(x) = 1$ die Polynome H_6, H_7 (Ihr könnt die Polynome $H_1, \ldots, H_5$ aus dem Skript ebenfalls verwenden.) **[2pt]**

(b) Zeige über Induktion, dass aus (12) und $H_0 = 1$ folgt

$$\frac{d}{dx}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{13}$$

[2pt]

(c) Die Wellenfunktionen (11) sind Eigenvektoren eines Hermiteschen linearen Operators und müssen deswegen orthogonal bezüglich des inneren Produktes

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x)g(x), \tag{14}$$

sein, also $\langle\psi_n|\psi_{n'}\rangle = \delta_{n,n'}$ erfüllen. Zeige unter Verwendung von (13), dass dies für die Wellenfunktionen ψ_n, ψ_{n+1} gilt, also dass tatsächlich gilt

$$\langle\psi_{n+1}|\psi_n\rangle = 0 \tag{15}$$

[1pt]

3 Eine Potentialbarriere (5+5pt)

Betrachte die Streuung von Teilchen an einer Potentialbarriere, die durch das folgende Potential gegeben ist:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 > 0 & \text{für } |x| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{16}$$

Das Potential teilt den Raum in drei Regionen:

- **Region 1**: $x < -a$
- **Region 2**: $|x| \leq a$
- **Region 3**: $x > a$.

Wir wollen zunächst formale Lösungen für die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung in den drei Bereichen $1, 2, 3$ einzeln bestimmen. Dazu machen wir für jede Region $j \in \{1, 2, 3\}$ den Ansatz

$$\psi_j(x) = A_j e^{ik_j x} + B_j e^{-ik_j x} \tag{17}$$

mit $A_j, B_j, k_j \in C$. Die Wellenzahl k_1 bestimmt die Energie E der Teilchen mit Masse m und wir nehmen an, dass $0 < E < V_0$; ein klassisches Teilchen kann also die Barriere mit dieser Energie nicht überwinden.

(a) Bestimme k_j in Abhängigkeit von E in den drei Regionen. **[2pt]**

Wir wollen nun aus den formalen Lösungen für die einzelnen Bereiche eine formale Lösung Ψ auf ganz $\mathbb{R}$ konstruieren. Sowohl Ψ als auch die Ableitung $\Psi' = \frac{d\Psi}{dx}$ müssen stetig sein.

(b) Benutze die Stetigkeit von Ψ und Ψ', um ein lineares Gleichungssystem für die Konstanten A_j und B_j zu finden, und schreibe es in der Form

$$M_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}, \qquad M_3 \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = M_4 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

mit (2×2)-Matrizen M_1, M_2, M_3, M_4. **[3pt]**

(c) Zeige, dass die Matrizen M_2 und M_3 für $0 \neq E \neq V_0$ invertierbar sind und benutze dies um eine Gleichung der Form

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

mit einer komplexen 2×2-Matrix $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ aufzustellen. Berchne α und β explizit und bestimme $\det\{M\}$. *Hinweis*: Bei der expliziten Berechnung von M ist es hilfreich, zuerst das Produkt $M_4 M_2^{-1}$ auszurechnen. **[+2pt]**

Wir wollen nun den Fall betrachten, bei dem von rechts keine Teilchen auf die Barriere treffen. Das bedeutet $B_3 = 0$ (Stelle kurz sicher, dass dies so folgt).

(d) Zeige, dass der Transmissionskoeffizient $T := |A_3/A_1|^2$ gegeben ist durch:

$$T = \frac{1}{\cosh^2(2\kappa a) + \left(\frac{\kappa^2 - k_1^2}{2k_1\kappa}\right)^2 \sinh^2(2\kappa a)} \tag{20}$$

[+1pt]

(e) Wir wollen nun das Verhalten von T als Funktion von a für festes E und festes V_0 diskutieren. Wie lässt sich der Ausdruck für T für große und kleine a approximieren? Kommentiere die physikalischem Implikationen. **[+1pt]**

(f) Bestimme nun den Reflektionskoeffizienten $R := |B_1/A_1|^2$ und berechne $R + T$. Diskutiere das Ergebnis. **[+1pt]**