

1 Schwinger Oszillator (5+5pt)

- (a) Betrachte zwei unabhängige harmonische Oszillatoren $a_{\pm}$. Sei $J_{\pm} = \hbar a_{\pm}^{\dagger} a_{\mp}$, $J_z = \frac{\hbar}{2} (a_{+}^{\dagger} a_{+} - a_{-}^{\dagger} a_{-})$ und $\hat{N} = a_{+}^{\dagger} a_{+} + a_{-}^{\dagger} a_{-}$. **[2pt]**
Erkläre in Worten, was die Observablen N, J_z beschreiben sollen. Zeige:

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm \hbar J_{\pm} \quad (1)$$

$$[J_{+}, J_{-}] = 2\hbar J_z. \quad (2)$$

Tipp: Da a_{+}, a_{-} unabhängig sind, gilt $[a_{+}, a_{-}] = 0$ und analog für die adjungierten $a_{+}^{\dagger}$ (kurz: $+$ kommutiert mit $-$). Hilfreich ist die Identität

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B. \quad (3)$$

Betrachte als Beispiel

$$\begin{aligned} [a_{+}^{\dagger} a_{-}^{\dagger}, a_{-}] &= a_{+}^{\dagger} [a_{-}^{\dagger}, a_{-}] + [a_{+}^{\dagger}, a_{-}] a_{-}^{\dagger} \\ &= a_{+}^{\dagger} [a_{-}^{\dagger}, a_{-}] + 0 \cdot a_{-}^{\dagger} \\ &= -a_{+}^{\dagger}, \end{aligned} \quad (4)$$

wobei wir in der letzten Gleichung $[a_{-}, a_{-}^{\dagger}] = 1$ und die Kommutativität von a_{+}, a_{-} nutzten.

- $[J_{+}, J_z] = \frac{\hbar^2}{2} ([a_{+}^{\dagger} a_{-}, a_{+}^{\dagger} a_{+} - a_{-}^{\dagger} a_{-}]) = \frac{\hbar^2}{2} (a_{+}^{\dagger} [a_{+}^{\dagger}, a_{+}] a_{-} - a_{+}^{\dagger} [a_{-}, a_{-}^{\dagger}] a_{-}) = \frac{\hbar^2}{2} (-a_{+}^{\dagger} a_{-} - a_{+}^{\dagger} a_{-}) = -\hbar^2 a_{+}^{\dagger} a_{-} = -\hbar J_{+}$. Also $[J_z, J_{+}] = +\hbar J_{+}$. [1p]
 - $[J_{-}, J_z]$ analog wie für J_{+}
 - $[J_{+}, J_{-}] = \hbar^2 [a_{+}^{\dagger} a_{-}, a_{-}^{\dagger} a_{+}] = \hbar^2 (a_{+}^{\dagger} [a_{-}, a_{-}^{\dagger}] a_{+} + a_{-}^{\dagger} [a_{+}^{\dagger}, a_{+}] a_{-}) = \hbar^2 (a_{+}^{\dagger} a_{+} - a_{-}^{\dagger} a_{-}) = 2\hbar J_z$. [0.5p]
 - N beschreibt den Gesamtzahloperator, J_z die Differenz der Zahloperatoren. [0.5p].
- (b) Wir definieren $\hat{\mathbb{J}}^2 = J_z^2 + \frac{1}{2} (J_{+} J_{-} + J_{-} J_{+})$. Zeige, dass $\mathbb{J}^2 = \frac{\hbar^2}{2} \hat{N} \left(\frac{\hat{N}}{2} + 1 \right)$ gilt. Was misst die Observable $\hat{\mathbb{J}}^2$? Zeige: $[J_z, \mathbb{J}^2] = 0$. **[1pt]** $\hat{\mathbb{J}}^2 = J_z^2 + \frac{1}{2} (J_{+} J_{-} + J_{-} J_{+})$. Es gilt direkt, dass:

$$J_z^2 = \frac{\hbar^2}{4} (a_{+}^{\dagger} a_{+} a_{+}^{\dagger} a_{+} + a_{-}^{\dagger} a_{-} a_{-}^{\dagger} a_{-} - 2a_{+}^{\dagger} a_{+} a_{-}^{\dagger} a_{-}) \quad (5)$$

Außerdem gilt:

$$J_{+} J_{-} + J_{-} J_{+} = \hbar^2 (a_{+}^{\dagger} a_{-} a_{-}^{\dagger} a_{+} + a_{-}^{\dagger} a_{+} a_{+}^{\dagger} a_{-}) = \hbar^2 (a_{+}^{\dagger} a_{+} a_{-} a_{-}^{\dagger} + a_{-}^{\dagger} a_{-} a_{+} a_{+}^{\dagger}). \quad (6)$$

Nun gilt auch direkt:

$$\hbar^2(a_+^\dagger a_+ a_- a_-^\dagger + a_-^\dagger a_- a_+ a_+^\dagger) = \hbar^2(a_+^\dagger a_+ a_-^\dagger a_- + a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-). \quad (7)$$

Dies ist $\hbar^2(a_+^\dagger a_+ a_-^\dagger a_- + a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-) = \hbar^2(2a_+^\dagger a_+ a_-^\dagger a_- + \hat{N})$.
In Summe erhalten wir das Resultat:

$$\hat{\mathbb{J}}^2 = J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) \quad (8)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}(a_+^\dagger a_+ a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- a_-^\dagger a_- - 2a_+^\dagger a_+ a_-^\dagger a_-) + \frac{\hbar^2}{2}(2a_+^\dagger a_+ a_-^\dagger a_- + \hat{N}) \quad (9)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}(a_+^\dagger a_+ a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- a_-^\dagger a_- - 2a_+^\dagger a_+ a_-^\dagger a_- + 4a_+^\dagger a_+ a_-^\dagger a_- + 2\hat{N}) \quad (10)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}(a_+^\dagger a_+ a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- a_-^\dagger a_- + 2a_+^\dagger a_+ a_-^\dagger a_- + 2\hat{N}) \quad (11)$$

Da $\hat{N}^2 = (a_+^\dagger a_+ a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- a_-^\dagger a_- + 2a_+^\dagger a_+ a_-^\dagger a_-)$ ist, ist:

$$\hat{\mathbb{J}}^2 = \frac{\hbar^2}{4}(\hat{N}^2 + 2\hat{N}) = \frac{\hbar^2}{2}\hat{N}\left(\frac{\hat{N}}{2} + 1\right). \quad (12)$$

Da $[N, J_z] = 0$, folgt $[J_z, \hat{\mathbb{J}}^2] = 0$.

$\hat{\mathbb{J}}^2$ misst den Gesamtbetrag des Drehimpulses.

- (c) Wir nummerieren die Basis des gesamten Systems mit $|n_+, n_- \rangle = |n_+ \rangle \otimes |n_- \rangle$ in den Zuständen des Gesamtsystems. Zeige:

$$J_+ |n_+, n_- \rangle = \hbar \sqrt{n_- (n_- + 1)} |n_+ + 1, n_- - 1 \rangle \quad (13)$$

$$J_- |n_+, n_- \rangle = \hbar \sqrt{n_+ (n_+ + 1)} |n_+ - 1, n_- + 1 \rangle \quad (14)$$

$$J_z |n_+, n_- \rangle = \frac{\hbar}{2}(n_+ - n_-) |n_+, n_- \rangle \quad (15)$$

Was gilt also für den Operator $\hat{N}$? Nutze, das um zu begründen, dass man die Zustände $|n_+, n_- \rangle$ nummerieren kann mit $j = \frac{1}{2}(n_+ + n_-)$ und $m = \frac{1}{2}(n_+ - n_-)$. Zeige, dass nun gilt:

$$|j, m \rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{j+m} (a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0, 0 \rangle \quad (16)$$

[2pt]

- $J_+ |n_+, n_- \rangle = \hbar a_+^\dagger a_- |n_+, n_- \rangle = \hbar \sqrt{n_-} a_+^\dagger |n_+, n_- - 1 \rangle = \hbar \sqrt{n_+ + 1} \sqrt{n_-} |n_+ + 1, n_- - 1 \rangle$.
- $J_- |n_+, n_- \rangle = \hbar a_-^\dagger a_+ |n_+, n_- \rangle = \hbar \sqrt{n_+} a_-^\dagger |n_+ - 1, n_- \rangle = \hbar \sqrt{n_- + 1} \sqrt{n_+} |n_+ - 1, n_- + 1 \rangle$

- $J_z |n_+, n_-\rangle = \frac{\hbar}{2} (a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) |n_+, n_-\rangle = \frac{\hbar}{2} (n_+ - n_-) |n_+, n_-\rangle$.
- $\hat{N}, J_z$ kommutieren mit dem Hamiltonoperator der zwei Oszillatoren. Somit existiert eine gemeinsame Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.
- $|n_+, n_-\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{n_+} (a_-^\dagger)^{n_-}}{\sqrt{n_+! n_-!}} |0, 0\rangle$.
- Man kann umstellen, sodass $n_+ = j + m, n_- = j - m$ gilt.
- Also gilt:

$$|j, m\rangle \cong |n_+, n_-\rangle = |j + m, j - m\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{j+m} (a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0, 0\rangle. \quad (17)$$

- (d) Wir können eine Rotationsmatrix aufteilen, indem wir eine Rotation durch die Eulerwinkel darstellen: $R(\psi, \theta, \phi) = R_z(\psi) R_y(\theta) R_z(\phi)$. Wie wirkt eine Rotation $R_z = e^{i\frac{\phi}{\hbar} J_z}$ auf $|j, m\rangle$?

Es genügt also $R_y = e^{i\frac{\theta}{\hbar} J_y}$ zu betrachten. Zeige:

$$R_y(\theta) a_\pm^\dagger R_y(\theta)^{-1} = \cos(\theta/2) a_\pm^\dagger \mp \sin(\theta/2) a_\mp^\dagger. \quad (18)$$

[+2pt] *Hinweis:* Beachte $J_y = \frac{\hbar}{2i} (a_+^\dagger a_- - a_-^\dagger a_+)$. Nutze die Lie'sche Formel! (<https://de.wikipedia.org/wiki/Baker-Campbell-Hausdorff-Formel>)

- $R_z(\phi) |j, m\rangle = e^{i\frac{\phi}{\hbar} J_z} |j, m\rangle = e^{i\phi m} |j, m\rangle$, da $|j, m\rangle$ in einem simultanen Eigenzustand von J_z und $\hat{N}$ ist. Man hat $J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle$.
- $J_y = \frac{\hbar}{2i} (a_+^\dagger a_- - a_-^\dagger a_+)$. Wir berechnen also:

$$[(a_+^\dagger a_- - a_-^\dagger a_+), a_+^\dagger] = -a_-^\dagger, \quad (19)$$

$$[(a_+^\dagger a_- - a_-^\dagger a_+), a_-^\dagger] = +a_+^\dagger. \quad (20)$$

- Daraus folgt:

$$[(a_+^\dagger a_- - a_-^\dagger a_+), [(a_+^\dagger a_- - a_-^\dagger a_+), a_\pm^\dagger]] = -a_\pm^\dagger. \quad (21)$$

Das heisst, $[J_y, a_\pm^\dagger] = \mp \hbar a_\mp^\dagger \frac{1}{2i}$, $[J_y, [J_y, a_\pm^\dagger]] = a_\pm^\dagger \hbar^2 \frac{1}{4}$. Nun wechseln sich also immer $a_+^\dagger$ und $a_-^\dagger$ ab, bei einer geraden Anzahl verschachtelter Kommutatoren, bzw. einer ungeraden Anzahl. Das bedeutet $[J_y, a_\pm^\dagger]_m = \mp \frac{1}{i} (\frac{\hbar}{2})^m a_\mp^\dagger =$

$\pm i(\frac{\hbar}{2})^m a_{\mp}^{\dagger}$ für n ungerade und $[J_y, a_{\pm}^{\dagger}]_m = (\frac{\hbar}{2})^m a_{\pm}^{\dagger}$ für n gerade. Das heißt mit der Lie'schen Formel:

$$\begin{aligned}
 R_y(\theta) a_{\pm}^{\dagger} R_y(\theta)^{-1} &= e^{i\frac{\theta}{\hbar} J_y} a_{\pm}^{\dagger} e^{-i\frac{\theta}{\hbar} J_y} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} [i\frac{\theta}{\hbar} J_y, a_{\pm}^{\dagger}]_m \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\theta}{\hbar})^m}{m!} [J_y, a_{\pm}^{\dagger}]_m \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\theta}{\hbar})^{2m}}{(2m)!} [J_y, a_{\pm}^{\dagger}]_{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\theta}{\hbar})^{2m+1}}{(2m+1)!} [J_y, a_{\pm}^{\dagger}]_{2m+1} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\theta/\hbar)^{2m}}{(2m)!} [J_y, a_{\pm}^{\dagger}]_{2m} + i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\theta/\hbar)^{2m+1}}{(2m+1)!} [J_y, a_{\pm}^{\dagger}]_{2m+1} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\theta/\hbar)^{2m}}{(2m)!} (\frac{\hbar}{2})^{2m} a_{\pm}^{\dagger} + i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\theta/\hbar)^{2m+1}}{(2m+1)!} (\pm i(\frac{\hbar}{2})^{2m+1} a_{\mp}^{\dagger}) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{\theta}{2})^{2m}}{(2m)!} a_{\pm}^{\dagger} \mp \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{\theta}{2})^{2m+1}}{(2m+1)!} a_{\mp}^{\dagger} \\
 &= \cos(\theta/2) a_{\pm}^{\dagger} \mp \sin(\theta/2) a_{\mp}^{\dagger} \quad (22)
 \end{aligned}$$

(e) Berechne $R_y(\theta) |j, m\rangle$. Drücke das Resultat aus durch:

$$R_y(\theta) |j, m\rangle = \sum_{m'} d_{m,m'}^j(\theta) |j, m'\rangle, \quad (23)$$

wo man $d_{m,m'}^j$ bestimmen muss. Das Resultat ist:

$$\begin{aligned}
 d_{m,m'}^j &= \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!} \times \\
 &\sum_k \frac{\cos(\theta/2)^{2j-2k-m+m'} \sin(\theta/2)^{2k+m-m'} (-1)^k}{k!(m-m'+k)!(j-m-k)!(j+m'-k)!},
 \end{aligned}$$

wo $\max(0, m' - m) \leq k \leq \min(j - m, j + m')$. **[+3pt]**

Der Binomische Lehrsatz besagt:

$$(x+y)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} x^k y^{N-k}. \quad (24)$$

Wir verwenden die obige Form für $|j, m\rangle$. Dann ist direkt:

$$R_y(\theta) |j, m\rangle = \frac{R_y(\theta) (a_+^{\dagger})^{j+m} R_y^{-1}(\theta) R_y(\theta) (a_-^{\dagger})^{j-m} R_y(\theta)^{-1} R_y(\theta)}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0, 0\rangle \quad (25)$$

nachdem $R_y(\theta) |0, 0\rangle = |0, 0\rangle$. Wir schreiben ab hier $R_y(\theta) = R$:

$$R |j, m\rangle = \frac{(Ra_+^\dagger R^{-1})^{j+m} (Ra_-^\dagger R^{-1})^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0, 0\rangle. \quad (26)$$

Weiters:

$$R |j, m\rangle = \frac{(\cos(\theta/2)a_+^\dagger + \sin(\theta/2)a_-^\dagger)^{j+m} (\cos(\theta/2)a_-^\dagger - \sin(\theta/2)a_+^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0, 0\rangle \quad (27)$$

Nun kommutieren a_+, a_- , also können wir den binomischen Lehrsatz verwenden und erhalten für den Zähler:

$$(\cos(\theta/2)a_+^\dagger + \sin(\theta/2)a_-^\dagger)^{j+m} = \sum_{k=0}^{j+m} \binom{j+m}{k} \cos(\theta/2)^k (\sin(\theta/2))^{j+m-k} a_+^{\dagger k} a_-^{\dagger(j+m-k)} \quad (28)$$

$$(\cos(\theta/2)a_-^\dagger - \sin(\theta/2)a_+^\dagger)^{j-m} = \sum_{l=0}^{j-m} \binom{j-m}{l} \cos(\theta/2)^{j-m-l} (\sin(\theta/2))^l a_+^{\dagger l} a_-^{\dagger(j-m-l)} (-1)^l. \quad (29)$$

Damit können wir diese Terme in $R |j, m\rangle$ einsetzen:

$$R |j, m\rangle = \sum_k \sum_l \binom{j+m}{k} \binom{j-m}{l} \frac{\cos(\theta/2)^{j-m-l+k} \sin(\theta/2)^{j+m-k+l} a_+^{\dagger(j+l)} a_-^{\dagger(2j-l-k)}}{\sqrt{(j-m)!(j+m)!}} |0, 0\rangle. \quad (30)$$

Wir können schematisch die Form schreiben:

$$R |j, m\rangle = \sum_{k,l} f(j, m, k, l) \cos(\theta/2)^\alpha \sin(\theta/2)^\beta (a_+^\dagger)^\gamma (a_-^\dagger)^\delta |0, 0\rangle. \quad (31)$$

Hier sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Exponenten, die von den übrigen Konstanten abhängig sind. $f(j, m, k, l)$ gruppiert die Fakultäten, die wir aus dem Binomischen Lehrsatz erhalten und aus der Definition der Zustände $|j, m\rangle$.

Damit ist der Faktor $f(j, m, k, l)$:

$$f(j, m, k, l) = \binom{j+m}{k} \binom{j-m}{l} \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} (-1)^l. \quad (32)$$

Damit ist

$$\alpha = j - m + k - l \quad (33)$$

$$\beta = j + m - k + l \quad (34)$$

$$\gamma = k + l \quad (35)$$

$$\delta = 2j - l - k. \quad (36)$$

Der Zustand $(a_+^\dagger)^\gamma (a_-^\dagger)^\delta |0, 0\rangle$ soll $|j, m'\rangle$ sein. Wir wissen

$$|j, m'\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{j+m'} (a_-^\dagger)^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}} |0, 0\rangle \quad (37)$$

Das bedeutet $\gamma = j + m'$ und $\delta = j - m'$ für ein m' . $\gamma = j + m' = k + l$ bedeutet $m' = k + l - j$. Damit gilt

$$(a_+^\dagger)^\gamma (a_-^\dagger)^\delta |0, 0\rangle \equiv (a_+^\dagger)^{j+m'} (a_-^\dagger)^{j-m'} |0, 0\rangle = \sqrt{(j+m')!(j-m')!} |j, m'\rangle. \quad (38)$$

Um den Zustand $|j, m'\rangle$ zu erzeugen, schreiben wir jetzt die neue Funktion $F(j, m, k, l, m')$:

$$F(j, m, k, l, m') = \sqrt{(j+m')!(j-m')!} f(j, m, k, l). \quad (39)$$

Jetzt ist:

$$R|j, m\rangle = \sum_{k,l} F(j, m, k, l, m') \cos(\theta/2)^\alpha \sin(\theta/2)^\beta |j, m'\rangle. \quad (40)$$

Im Folgenden ersetzen wir nun k durch m' . Also ist $k = m' - l + j$:

$$\alpha = 2j - 2l + m' - m \quad (41)$$

$$\beta = 2j + m - m' \quad (42)$$

Dasselbe tun wir jetzt für $F(j, m, l, m')$. Da nur $f(j, k, l, m)$ von k abhängt, ist:

$$\begin{aligned} f(j, m', m, l) &= \binom{j+m}{m'+j-l} \binom{j-m}{l} \frac{1}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}} (-1)^l \\ &= \frac{(j+m)!}{(j+m'-l)!l!} \frac{(j-m)!}{(j-m-l)!(m-m'+l)!} \frac{1}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}} (-1)^l \\ &= \frac{\sqrt{(j+m')!(j-m')!} (-1)^l}{(j+m'-l)!l!(j-m-l)!(m-m'+l)!}. \end{aligned} \quad (43)$$

Es gilt zudem: $m' - m = k + l - j - m \leq j + m + j - m - j - m = j - m$.

2 Hermitepolynome [5pt]

Ihr habt in der Vorlesung die Wellenfunktion des Harmonischen Oszillators über die Hermite-polynome ausgedrückt.

$$\psi_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi} x_0)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{x_0})^2} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right), \quad (44)$$

wobei $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega m}}$ und H_n das n -te Hermite-polynom sind. Nehme im Folgenden ohne Beweis an, dass gilt

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \quad (45)$$

- (a) Berechne basierend auf der obigen Identität (45) (oder unter Nutzung der Gleichung für ψ_n aus dem Skript) mit der Annahme $H_0(x) = 1$ die Polynome H_6, H_7 (Ihr könnt die Polynome $H_1, \dots, H_5$ aus dem Skript ebenfalls verwenden.) **[2pt]**

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\begin{aligned} H_4 &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \\ H_5 &= 32x^5 - 160x^3 + 120x. \end{aligned} \quad (46)$$

einsetzen dieser Polynome in Gleichung (45) für $n = 6, n = 7$ ergibt

$$\begin{aligned} H_6 &= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120 \\ H_7 &= 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x \end{aligned} \quad (47)$$

- (b) Zeige über Induktion, dass aus (45) und $H_0 = 1$ folgt

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2n H_{n-1}(x) \quad (48)$$

[2pt]

Mit $H_0 = 1$ erfüllt $H_2 = 2x$, dass

$$\frac{d}{dx} H_2(x) = 2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot (1) H_1, \quad (49)$$

also ist (48) für $n = 2$ und $n = 1$ erfüllt. Nun nehmen wir für den Induktionsschritt an, dass (48) für ein endliches n gilt und wir wollen dieses nun für $n + 1$ zeigen. Wir berechnen die Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} H_{n+1} &= \frac{d}{dx} (2x H_n - 2n H_{n-1}) \\ &= 2H_n + 2x \frac{d}{dx} H_n - 2n \frac{d}{dx} H_{n-1} \end{aligned} \quad (50)$$

Nun setzen wir die Gleichung (45) für H_n und die Gleichung (48) für $\frac{d}{dx} H_n, \frac{d}{dx} H_{n-1}$ ein, da diese per Induktionsannahme gilt und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} H_{n+1} &= 2(2x H_{n-1} - 2(n-1) H_{n-2}) + 4x n H_{n-1} - 4n(n-1) H_{n-2} \\ &= H_{n-1}(4x + 4nx) - (4(n-1) + 4n(n-1)) H_{n-2} \\ &= 4x(n+1) H_{n-1} - 4(n-1)(n+1) H_{n-2} \end{aligned} \quad (51)$$

Dies wollen wir jetzt mit der rechten Seite $2(n+1) H_n$ vergleichen

$$\begin{aligned} 2(n+1) H_n &= 2(n+1)(2x H_{n-1} - 2(n-1) H_{n-2}) \\ &= 4x(n+1) H_{n-1} - 4(n+1)(n-1) H_{n-2}, \end{aligned} \quad (52)$$

wobei wir in der ersten Zeile wieder (45) verwendet haben. Dies stimmt mit der letzten Zeile aus (51) überein und somit ist der Induktionsschritt abgeschlossen. Damit gilt die Formel (48) für alle n .

- (c) Die Wellenfunktionen (44) sind Eigenvektoren eines Hermiteschen linearen Operators und müssen deswegen orthogonal bezüglich des inneren Produktes

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x)g(x), \quad (53)$$

sein, also $\langle \psi_n|\psi_{n'}\rangle = \delta_{n,n'}$ erfüllen. Zeige unter Verwendung von (48), dass dies für die Wellenfunktionen ψ_n, ψ_{n+1} gilt, also dass tatsächlich gilt

$$\langle \psi_{n+1}|\psi_n\rangle = 0 \quad (54)$$

[1pt]

Um zu zeigen, dass ψ_n, ψ_{n+1} orthogonal sind, reicht es das Integral

$$I_{n,n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-2x^2) H_n(x) H_{n+1}(x) \quad (55)$$

zu betrachten, da dies in der Auswertung von $\langle \psi_{n+1}|\psi_n\rangle$ gelöst werden muss. Nun verwenden wir (48) und ersetzen H_n , sodass

$$I_{n,n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-2x^2) \frac{1}{2(n+1)} H_{n+1}(x) \frac{d}{dx} H_{n+1}(x) \quad (56)$$

Jetzt nutzen wir, dass $f(x) \frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (f(x)^2)$, womit

$$I_{n,n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4(n+1)} dx \exp(-2x^2) \frac{d}{dx} H_{n+1}(x)^2. \quad (57)$$

Nun können wir partiell integrieren und die Randterme weglassen, da diese durch die Gaußsche Funktion zu null auswerten. Wir erhalten somit

$$I_{n,n+1} = \frac{1}{2(n+1)} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-2x^2) H_{n+1}(x)^2 \quad (58)$$

Nun kann man verwenden, dass Hermite-polynome entweder gerade oder ungerade unter Spiegelung an der y -Achse sind. Dies sieht man, da $H_0 = 1$ automatisch gerade ist, $H_1 = 2x$ ungerade und nach der iterationsvorschrift (45) H_{n+1} sich aus x mal H_n und H_{n-1} zusammensetzt. Wenn H_n gerade ist ($H_n(-x) = H_n(x)$) und H_{n-1} ungerade, so ist dann H_{n+1} eine Summe ungerader Funktionen und darum wieder ungerade. Analog lässt sich zeigen, dass wenn H_n ungerade ist, dass H_{n+1} wieder gerade ist, falls H_{n-1} auch gerade ist. Damit haben alle Hermite Polynome entweder gerades oder ungerades Verhalten unter $x \rightarrow -x$. Dadurch ist $H_{n+1}(x)^2$ eine symmetrische und positive Funktion. Da $\exp(-2x^2)$ ebenfalls symmetrisch und positive ist, ist das integral $I_{n,n+1}$ ein integral einer antisymmetrischen funktion über ein symmetrisches Intervall und damit auch verschwindend, also

$$I_{n,n+1} = 0, \quad (59)$$

was zu zeigen war.

3 Eine Potentialbarriere (5+5pt)

Betrachte die Streuung von Teilchen an einer Potentialbarriere, die durch das folgende Potential gegeben ist:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 > 0 & \text{für } |x| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (60)$$

Das Potential teilt den Raum in drei Regionen:

- **Region 1:** $x < -a$
- **Region 2:** $|x| \leq a$
- **Region 3:** $x > a$.

Wir wollen zunächst formale Lösungen für die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung in den drei Bereichen 1, 2, 3 einzeln bestimmen. Dazu machen wir für jede Region $j \in \{1, 2, 3\}$ den Ansatz

$$\psi_j(x) = A_j e^{ik_j x} + B_j e^{-ik_j x} \quad (61)$$

mit $A_j, B_j, k_j \in \mathbb{C}$. Die Wellenzahl k_1 bestimmt die Energie E der Teilchen mit Masse m und wir nehmen an, dass $0 < E < V_0$; ein klassisches Teilchen kann also die Barriere mit dieser Energie nicht überwinden.

- (a) Bestimme k_j in Abhängigkeit von E in den drei Regionen. **[2pt]**

Die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung lautet

$$H\psi_j = E\psi_j \implies -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_j}{dx^2} + (V(x) - E)\psi_j = 0 \quad (62)$$

Die zweifache Ableitung ergibt:

$$\frac{d^2\psi_j}{dx^2} = -k_j^2 \psi_j \quad (63)$$

Somit

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hbar^2 k_j^2}{2m} + (V(x) - E) \right) \psi_j &= 0 \\ \implies k_j^2 &= \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \\ \implies k_j &= \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x))} \end{aligned} \quad (64)$$

(wir können die positive Wurzel wählen). Für Region 1 und 3 erhalten wir

$$k_1 = k_3 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (65)$$

Für Region 2, nachdem $E - V_0 < 0$ erhalten wir allerdings

$$k_2 = \sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2}|E - V_0|} = i\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}|E - V_0|} \equiv i\kappa \quad (66)$$

Wir wollen nun aus den formalen Lösungen für die einzelnen Bereiche eine formale Lösung Ψ auf ganz $\mathbb{R}$ konstruieren. Sowohl Ψ als auch die Ableitung $\Psi' = \frac{d\Psi}{dx}$ müssen stetig sein.

- (b) Benutze die Stetigkeit von Ψ und Ψ' , um ein lineares Gleichungssystem für die Konstanten A_j und B_j zu finden, und schreibe es in der Form

$$M_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad M_3 \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = M_4 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad (67)$$

mit (2×2) -Matrizen M_1, M_2, M_3, M_4 . **[3pt]**

Die relevanten Stetigkeitsbedingungen für Ψ sind:

$$\psi_1(-a) = \psi_2(-a), \quad \psi_3(a) = \psi_2(a) \quad (68)$$

Für Ψ' sind diese:

$$\psi'_1(-a) = \psi'_2(-a), \quad \psi'_3(a) = \psi'_2(a) \quad (69)$$

Wir können diese auch wie folgt zusammenfassen

$$\begin{pmatrix} \psi_1(-a) \\ \psi'_1(-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2(-a) \\ \psi'_2(-a) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi_3(a) \\ \psi'_3(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2(a) \\ \psi'_2(a) \end{pmatrix} \quad (70)$$

Die einmalige Ableitung der einzelnen Lösungen ergibt:

$$\psi'_j(x) = ik_j (A_j e^{ik_j x} - B_j e^{-ik_j x}) \quad (71)$$

Durch Einsetzen erhalten wir also

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \psi_1(-a) \\ \psi'_1(-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2(-a) \\ \psi'_2(-a) \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} A_1 e^{-ik_1 a} + B_1 e^{ik_1 a} \\ ik_1 (A_1 e^{-ik_1 a} - B_1 e^{ik_1 a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 e^{-ik_2 a} + B_2 e^{ik_2 a} \\ ik_2 (A_2 e^{-ik_2 a} - B_2 e^{ik_2 a}) \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} e^{-ik_1 a} & e^{ik_1 a} \\ ik_1 e^{-ik_1 a} & -ik_1 e^{ik_1 a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ik_2 a} & e^{ik_2 a} \\ ik_2 e^{-ik_2 a} & -ik_2 e^{ik_2 a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & M_1 \equiv \begin{pmatrix} e^{-ik_1 a} & e^{ik_1 a} \\ ik_1 e^{-ik_1 a} & -ik_1 e^{ik_1 a} \end{pmatrix}, \quad M_2 \equiv \begin{pmatrix} e^{-ik_2 a} & e^{ik_2 a} \\ ik_2 e^{-ik_2 a} & -ik_2 e^{ik_2 a} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \psi_3(a) \\ \psi'_3(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2(a) \\ \psi'_2(a) \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} A_3 e^{ik_3 a} + B_3 e^{-ik_3 a} \\ ik_3 (A_3 e^{ik_3 a} - B_3 e^{-ik_3 a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 e^{ik_2 a} + B_2 e^{-ik_2 a} \\ ik_2 (A_2 e^{ik_2 a} - B_2 e^{-ik_2 a}) \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} e^{ik_3 a} & e^{-ik_3 a} \\ ik_3 e^{ik_3 a} & -ik_3 e^{-ik_3 a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ik_2 a} & e^{-ik_2 a} \\ ik_2 e^{ik_2 a} & -ik_2 e^{-ik_2 a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow M_3 \equiv \begin{pmatrix} e^{ik_1 a} & e^{-ik_1 a} \\ ik_1 e^{ik_1 a} & -ik_1 e^{-ik_1 a} \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} e^{ik_2 a} & e^{-ik_2 a} \\ ik_2 e^{ik_2 a} & -ik_2 e^{-ik_2 a} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{73}$$

nachdem $k_3 = k_1$.

- (c) Zeige, dass die Matrizen M_2 und M_3 für $0 \neq E \neq V_0$ invertierbar sind und benutze dies um eine Gleichung der Form

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \tag{74}$$

mit einer komplexen 2×2 -Matrix $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ aufzustellen. Berechne α und β explizit und bestimme $\det\{M\}$. *Hinweis:* Bei der expliziten Berechnung von M ist es hilfreich, zuerst das Produkt $M_4 M_2^{-1}$ auszurechnen. **[+2pt]**

Eine Matrix ist invertierbar, sofern ihre Determinante ungleich null ist. Wir zeigen dies:

$$\det\{M_2\} = -2ik_2 \neq 0, \quad \det\{M_3\} = -2ik_1 \neq 0 \tag{75}$$

für $0 \neq E \neq V_0$.

Wir können M_2 invertieren. Für eine 2×2 Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist deren Inverse gegeben durch $A^{-1} = \frac{1}{\det\{A\}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Somit haben wir für M_2^{-1} :

$$M_2^{-1} = \frac{1}{-2ik_2} \begin{pmatrix} -ik_2 e^{ik_2 a} & -e^{ik_2 a} \\ -ik_2 e^{-ik_2 a} & e^{-ik_2 a} \end{pmatrix} \tag{76}$$

Nun befolgen wir den Hinweis und berechnen $M_4 M_2^{-1}$:

$$\begin{aligned}
M_4 M_2^{-1} &= \begin{pmatrix} e^{ik_2 a} & e^{-ik_2 a} \\ ik_2 e^{ik_2 a} & -ik_2 e^{-ik_2 a} \end{pmatrix} \frac{1}{-2ik_2} \begin{pmatrix} -ik_2 e^{ik_2 a} & -e^{ik_2 a} \\ -ik_2 e^{-ik_2 a} & e^{-ik_2 a} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{-2ik_2} \begin{pmatrix} -ik_2(e^{2ik_2 a} + e^{-2ik_2 a}) & -(e^{2ik_2 a} - e^{-2ik_2 a}) \\ k_2^2(e^{2ik_2 a} - e^{-2ik_2 a}) & -ik_2(e^{2ik_2 a} + e^{-2ik_2 a}) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{77}$$

Nun verwenden wir, dass $k_2 = i\kappa, \kappa \in \mathbb{R}$ und vereinfachen:

$$\begin{aligned}
 M_4 M_2^{-1} &= \frac{1}{-2ik_2} \begin{pmatrix} -ik_2(e^{2ik_2a} + e^{-2ik_2a}) & -(e^{2ik_2a} - e^{-2ik_2a}) \\ k_2^2(e^{2ik_2a} - e^{-2ik_2a}) & -ik_2(e^{2ik_2a} + e^{-2ik_2a}) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\kappa} \begin{pmatrix} \kappa(e^{-2\kappa a} + e^{2\kappa a}) & -(e^{-2\kappa a} - e^{2\kappa a}) \\ -\kappa^2(e^{-2\kappa a} - e^{2\kappa a}) & \kappa(e^{-2\kappa a} + e^{2\kappa a}) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\kappa} \begin{pmatrix} 2\kappa \cosh(2\kappa a) & 2 \sinh(2\kappa a) \\ 2\kappa^2 \sinh(2\kappa a) & 2\kappa \cosh(2\kappa a) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{78}$$

Wir können nun das Resultat zeigen, nachdem wir wissen, dass

$$\begin{aligned}
 M_3 \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} &= M_4 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \\
 \implies \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} &= M_3^{-1} M_4 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} &= M_3^{-1} M_4 M_2^{-1} M_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \\
 \implies \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} &= M \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{79}$$

Wir berechnen somit die Matrix $M = M_3^{-1}(M_4 M_2^{-1})M_1$. Weiters:

$$M_3^{-1} = \frac{1}{-2ik_1} \begin{pmatrix} -ik_1 e^{-ik_1 a} & -e^{-ik_1 a} \\ -ik_1 e^{ik_1 a} & e^{ik_1 a} \end{pmatrix} \tag{80}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 M &= M_3^{-1}(M_4 M_2^{-1})M_1 \\
 &= \frac{1}{-2ik_1} \begin{pmatrix} -ik_1 e^{-ik_1 a} & -e^{-ik_1 a} \\ -ik_1 e^{ik_1 a} & e^{ik_1 a} \end{pmatrix} \frac{1}{2\kappa} \begin{pmatrix} 2\kappa \cosh(2\kappa a) & 2 \sinh(2\kappa a) \\ 2\kappa^2 \sinh(2\kappa a) & 2\kappa \cosh(2\kappa a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-ik_1 a} & e^{ik_1 a} \\ ik_1 e^{-ik_1 a} & -ik_1 e^{ik_1 a} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{-2ik_1 \kappa} \begin{pmatrix} -ik_1 e^{-ik_1 a} & -e^{-ik_1 a} \\ -ik_1 e^{ik_1 a} & e^{ik_1 a} \end{pmatrix} \\
 &\quad \begin{pmatrix} e^{-ik_1 a} (\kappa \cosh(2\kappa a) + ik_1 \sinh(2\kappa a)) & e^{ik_1 a} (\kappa \cosh(2\kappa a) - ik_1 \sinh(2\kappa a)) \\ e^{-ik_1 a} (\kappa^2 \sinh(2\kappa a) + i\kappa k_1 \cosh(2\kappa a)) & e^{ik_1 a} (\kappa^2 \sinh(2\kappa a) - i\kappa k_1 \cosh(2\kappa a)) \end{pmatrix} \\
 &\equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{81}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \cos(2k_1 a) \cosh(2\kappa a) + \frac{(k_1^2 - \kappa^2)}{2k_1 \kappa} \sin(2k_1 a) \sinh(2\kappa a) \\
 &\quad + i[\cos(2k_1 a) \sinh(2\kappa a) \frac{(k_1^2 - \kappa^2)}{2k_1 \kappa} - \sin(2k_1 a) \cosh(2\kappa a)]
 \end{aligned} \tag{82}$$

$$\beta = \frac{-i}{2k_1 \kappa} (k_1^2 + \kappa^2) \sinh(2\kappa a) \tag{83}$$

Somit haben wir für die Determinante

$$\det\{M\} = |\alpha|^2 - |\beta|^2 \quad (84)$$

Wir vereinfachen:

$$|\alpha|^2 = \cosh^2(2\kappa a) + \left(\frac{\kappa^2 - k_1^2}{2k_1\kappa}\right)^2 \sinh^2(2\kappa a) \quad (85)$$

und

$$|\beta|^2 = \left(\frac{\kappa^2 + k_1^2}{2k_1\kappa}\right)^2 \sinh^2(2\kappa a) \quad (86)$$

Wir setzen in die Determinante ein

$$\det\{M\} = 1 \quad (87)$$

Wir wollen nun den Fall betrachten, bei dem von rechts keine Teilchen auf die Barriere treffen. Das bedeutet $B_3 = 0$ (Stelle kurz sicher, dass dies so folgt).

(d) Zeige, dass der Transmissionskoeffizient $T := |A_3/A_1|^2$ gegeben ist durch:

$$T = \frac{1}{\cosh^2(2\kappa a) + \left(\frac{\kappa^2 - k_1^2}{2k_1\kappa}\right)^2 \sinh^2(2\kappa a)} \quad (88)$$

[+1pt]

Wir wissen

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha A_1 + \beta B_1 \\ \beta^* A_1 + \alpha^* B_1 \end{pmatrix} \quad (89)$$

Somit haben wir

$$A_3 = \alpha A_1 + \beta B_1 \quad (90)$$

sowie mit $B_3 = 0$:

$$0 = \beta^* A_1 + \alpha^* B_1 \implies B_1 = -\frac{\beta^*}{\alpha^*} A_1 \quad (91)$$

Wir setzen damit in A_3 ein

$$A_3 = \alpha A_1 + \beta B_1 = \alpha A_1 - \frac{|\beta|^2}{\alpha^*} A_1 = A_1 \left(\alpha - \frac{|\beta|^2}{\alpha^*} \right) \quad (92)$$

Somit

$$\begin{aligned}
 T &= \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 \\
 &= \left| \alpha - \frac{|\beta|^2}{\alpha^*} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{|\alpha|^2} (|\alpha|^4 + |\beta|^4 - 2|\alpha|^2|\beta|^2) \\
 &= \frac{1}{|\alpha|^2} (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 \\
 &= \frac{1}{|\alpha|^2} \\
 &= \frac{1}{\cosh^2(2\kappa a) + \left(\frac{\kappa^2 - k_1^2}{2k_1\kappa} \right)^2 \sinh^2(2\kappa a)}
 \end{aligned} \tag{93}$$

- (e) Wir wollen nun das Verhalten von T als Funktion von a für festes E und festes V_0 diskutieren. Wie lässt sich der Ausdruck für T für große und kleine a approximieren? Kommentiere die physikalischen Implikationen. **[+1pt]**

Sowohl E als auch V_0 sind fixiert, d.h. κ und k_1 sind fixiert. Sei $a \ll \frac{1}{2\kappa}$. Betrachte die Taylorreihen

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + \dots, \quad \cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots \tag{94}$$

Wir approximieren:

$$\sinh(x) \approx x, \quad \cosh(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2} \tag{95}$$

Somit haben wir

$$\sinh^2(x) \approx x^2, \quad \cosh^2(x) \approx \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2 \approx 1 + x^2 \tag{96}$$

Wir können den Ausdruck für T für $a \ll \frac{1}{2\kappa}$ vereinfachen:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{\cosh^2(2\kappa a) + \left(\frac{\kappa^2 - k_1^2}{2k_1\kappa} \right)^2 \sinh^2(2\kappa a)} \\
 &\approx \frac{1}{1 + (2\kappa a)^2 + \left(\frac{\kappa^2 - k_1^2}{2k_1\kappa} \right)^2 (2\kappa a)^2} \\
 &= \frac{1}{1 + 4\kappa^2 a^2 \left[1 + \left(\frac{\kappa^2 - k_1^2}{2k_1\kappa} \right)^2 \right]}
 \end{aligned} \tag{97}$$

Für $a \rightarrow 0$ sehen, wir, dass $T \rightarrow 1$, wie erwartet.
 Ebenso wissen wir für $x \gg 1$, dass

$$\sinh(x) \approx \frac{e^x}{2}, \quad \cosh(x) \approx \frac{e^x}{2} \quad (98)$$

Für große $a \gg \frac{1}{2\kappa}$, haben wir somit

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\cosh^2(2\kappa a) + \left(\frac{\kappa^2 - k_1^2}{2k_1\kappa}\right)^2 \sinh^2(2\kappa a)} \\ &\approx \frac{1}{\frac{1}{4}e^{4\kappa a} + \left(\frac{\kappa^2 - k_1^2}{2k_1\kappa}\right)^2 \frac{1}{4}e^{4\kappa a}} \\ &= \frac{4}{e^{4\kappa a} \left[1 + \left(\frac{\kappa^2 - k_1^2}{2k_1\kappa}\right)^2\right]} \end{aligned} \quad (99)$$

Für große a fällt T exponentiell mit der Breite der Barriere, der Tunneleffekt ist also sehr unwahrscheinlich.

- (f) Bestimme nun den Reflektionskoeffizienten $R := |B_1/A_1|^2$ und berechne $R + T$. Diskutiere das Ergebnis. **[+1pt]**

Von vorhin wissen wir

$$B_1 = -\frac{\beta^*}{\alpha^*} A_1 \quad (100)$$

Der Reflektionskoeffizient ist somit

$$\begin{aligned} R &= |B_1/A_1|^2 = \left| -\frac{\beta^*}{\alpha^*} \right|^2 = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} \\ &= \frac{\left(\frac{\kappa^2 + k_1^2}{2k_1\kappa}\right)^2 \sinh^2(2\kappa a)}{\cosh^2(2\kappa a) + \left(\frac{\kappa^2 - k_1^2}{2k_1\kappa}\right)^2 \sinh^2(2\kappa a)} \end{aligned} \quad (101)$$

Betrachte

$$R + T = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} + \frac{1}{|\alpha|^2} = \frac{1 + |\beta|^2}{|\alpha|^2} = \frac{|\alpha|^2}{|\alpha|^2} = 1 \quad (102)$$

Wie erwartet, kann ein Teilchen entweder reflektiert oder transmittiert werden (Erhaltung der Wahrscheinlichkeit).