1 Diracsche δ-Funktion und Fourier-Analysis (8pt)

In dieser Aufgabe wiederholen wir elementare Eigenschaften der Diracsche δ-Funktion und Fourier-Analysis.

Die Diracsche δ-Funktion ist streng genommen keine Funktion, sondern eine Distribution. Dies ist eine Abbildung, die einer Funktion eine Zahl zuordnet. Per Definition haben wir

$$\int_I dx' f(x')\delta(x-x') = f(x) \tag{1}$$

für eine beliebig glatte Funktion f, sofern $x \in I$, wobei I das Integrationsintervall ist.

(a) Zeige die folgenden Eigenschaften.

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \delta(-x), \\ \delta(ax) &= \frac{1}{|a|}\delta(x), \qquad a \neq 0 \\ \delta(f(x)) &= \sum_n \frac{1}{\left|\frac{df}{dx}\right|}\delta(x-x_n), \\ \delta(x) &= \frac{d}{dx}\theta(x), \end{aligned} \tag{2}$$

wobei x_n die Nullstellen von f sind und θ die Heaviside-Funktion bezeichnet. **[4pt]**

(b) Sei die Fourier-Darstellung einer Funktion $f(x)$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx} \tag{3}$$

mit der Fourier-Transformierten $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} \tag{4}$$

Folgere nun die folgende Darstellung der δ-Funktion:

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} \tag{5}$$

[1pt]

(c) Beweise das Parsevalsche Theorem

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |\tilde{f}(k)|^2 \tag{6}$$

[1pt]

(d) Du bist mittlerweile schon vertraut mit zwei wichtigen Repräsentation/Wellenfunktionen eines abstrakten Zustandsvektors $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Im x und k-Raum haben wir die Beziehungen

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{\psi}(k) e^{ikx} \tag{7}$$

$$\tilde{\psi}(k) = \langle k|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) e^{-ikx} \tag{8}$$

mittels Fourier-Transformation. Wie generalisieren sich diese Überlegungen auf Dichteoperatoren ρ, die du bereits in der Vorlesung kennengelernt hast? **[2pt]**

2 Kohärente Zustände (4pt)

Ihr habt in der Vorlesung kohärente Zustände des Harmonischen Oszillators kennnengelernt

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle . \tag{9}$$

Diese sind essentiell in der Quantenoptik, da diese Zustände beschreiben, in denen der Vernichtungsoperator a einen definitiven Wert annimmt. Dieser Wert kann in der Quantenoptik zum Erwartungswert des Elektromagnetischen Feldes in Bezug gesetzt werden. Hier sollt ihr einige elementare Eigenschaften dieser Zustände ausarbeiten.

- (a) Zeige, dass für zwei komplexe Zahlen α, β das Skalarprodukt der entsprechenden kohärenten Zustände folgende Gleichung erfüllt

$$| \langle\alpha|\beta\rangle |^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2} \tag{10}$$

[2pt]

- (b) Wir definieren die Positions und Ortsoperatoren

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}(a + a^\dagger), P = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(a - a^\dagger), \tag{11}$$

wobei wir zur Bequemlichkeit $m = \omega = 1$ gesetzt haben. Berechne die Heisenbergsche Unschärferelation für X, P und zeige, dass die Unschärfe in einem kohärenten Zuständ den Minimalwert annimmt **[2pt]**

3 Verschiebungs- und Quetschungsoperatoren (8 pt)

Wir definieren für $\alpha \in \mathbb{C}$ und Leiteroperatoren $\hat{a}, \hat{a}^\dagger : [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = I$ den *Verschiebungsoperator*

$$D(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}. \tag{12}$$

Das Hadamard-Lemma (bzw. die Baker-Campbell-Haussdorf Formel) besagt, dass für Operatoren X, Y folgende Gleichung gilt

$$e^X Y e^{-X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[X,Y]_n. \tag{13}$$

Hierbei haben wir die sogenannten *vernesteten Kommutatoren* genutzt, welche rekursiv definiert sind als

$$[X,Y]_0 = Y, \quad [X,Y]_n = [X,[X,Y]_{n-1}],\ n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

(a) Zeige hiermit, dass folgendes gilt. **[2pt]**

$$D^\dagger(\alpha)\hat{a}D(\alpha) = \hat{a} + \alpha. \tag{15}$$

Hinweis: Zeige zuerst $D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha)$.

(b) Zeige hiermit, dass $D(\alpha)\left|0\right\rangle$ ein kohärenter Zustand ist und drücke $D(\alpha)\left|1\right\rangle$ in kohärenten Zuständen aus. **[1pt]**

(c) Wir definieren mit $z \in \mathbb{C}$ den *Quetschungsoperator*

$$S(z) = e^{(z^*\hat{a}^2 - z\hat{a}^{\dagger 2})/2}. \tag{16}$$

Zeige zunächst für $A = (z\hat{a}^{\dagger 2} - z^*\hat{a}^2)/2$, dass folgendes gilt. **[2pt]**

$$[A,\hat{a}]_n = \begin{cases} |z|^n \hat{a}, & n \text{ gerade}, \\ -z|z|^{n-1}\hat{a}^\dagger, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

(d) Zeige hiermit, dass folgendes gilt. **[1pt]**

$$S^\dagger(z)\hat{a}S(z) = \cosh(|z|)\hat{a} - \frac{z}{|z|}\sinh(|z|)\hat{a}^\dagger. \tag{17}$$

(e) Wir definieren das gequetschte Vakuum $\left|0,z\right\rangle = S(z)\left|0\right\rangle$. Berechne für diesen Zustand mit $z \in (0,1]$ die folgenden Momente. **[1pt]**

$$\langle\hat{x}\rangle, \langle\hat{p}\rangle, \langle\hat{x}^2\rangle, \langle\hat{p}^2\rangle. \tag{18}$$

(f) Überprüfe die Heisenberg'sche Unschärferelation. Wie verhält sich $(\Delta\hat{x})(\Delta\hat{p})$ relativ zum Vakuumzustand? **[1pt]**