1 Diracsche δ-Funktion und Fourier-Analysis (8pt)

In dieser Aufgabe wiederholen wir elementare Eigenschaften der Diracsche δ-Funktion und Fourier-Analysis.

Die Diracsche δ-Funktion ist streng genommen keine Funktion, sondern eine Distribution. Dies ist eine Abbildung, die einer Funktion eine Zahl zuordnet. Per Definition haben wir

$$\int_I dx' f(x')\delta(x-x') = f(x) \tag{1}$$

für eine beliebig glatte Funktion f, sofern $x \in I$, wobei I das Integrationsintervall ist.

(a) Zeige die folgenden Eigenschaften.

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= \delta(-x), \\
\delta(ax) &= \frac{1}{|a|}\delta(x), \qquad a \neq 0 \\
\delta(f(x)) &= \sum_n \frac{1}{\left|\frac{df}{dx}\right|}\delta(x-x_n), \\
\delta(x) &= \frac{d}{dx}\theta(x),
\end{aligned} \tag{2}$$

wobei x_n die Nullstellen von f sind und θ die Heaviside-Funktion bezeichnet. **[4pt]**

Um die Identitäten zu zeigen, verwenden wir die Definition der δ-Funktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x')\delta(x-x') = f(x) \tag{3}$$

(i) Um die erste Identität zu zeigen, setzen wir $x = 0$:

$$\begin{aligned}
f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x')\delta(0-x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x')\delta(-x') &= -\int_{\infty}^{-\infty} dx'' f(-x'')\delta(x'')) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx'' f(-x'')\delta(x'')) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx'' f(x'')\delta(0-(-x'')) \\
&\implies \delta(x) = \delta(-x)
\end{aligned} \tag{4}$$

(ii) Der Einfachkeit halber benutzen wir also als Definition (da einfach verschiebbar)

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x')\delta(x') \tag{5}$$

Weiters haben wir für $a > 0$:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x')\delta(ax') &= \int_{x''=-a\infty}^{a\infty} \frac{1}{a} dx'' f(x')\delta(x'') \\ &= \int_{x''=-\infty}^{\infty} dx'' f(x'')\frac{1}{a}\delta(x'') \\ = \int_{x''=-\infty}^{\infty} dx'' f(x'')\frac{1}{|a|}\delta(x'') &\implies \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)\end{aligned} \tag{6}$$

Ebenso haben wir für $a < 0$:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x')\delta(ax') &= \int_{x''=-a\infty}^{a\infty} \frac{1}{a} dx'' f(x')\delta(x'') \\ &= \int_{x''=\infty}^{-\infty} dx'' f(x'')\frac{1}{a}\delta(x'') \\ &= -\int_{x''=-\infty}^{\infty} dx'' f(x'')\frac{1}{a}\delta(x'') \\ &= \int_{x''=-\infty}^{\infty} dx'' f(x'')(-\frac{1}{a})\delta(x'') \\ = \int_{x''=-\infty}^{\infty} dx'' f(x'')\frac{1}{|a|}\delta(x'') &\implies \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)\end{aligned} \tag{7}$$

(iii) Wir wissen, dass

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' g(x')\delta(x') \tag{8}$$

für glatte Funktionen g. Das Argument von $\delta(x)$ pickt also die Nullstellen raus. Demnach bleiben also nur die Funktionswerte von g, für die $f(x_n) = 0$, das sind also die Nullstellen x_n von f. Wir haben demnach

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' g(x')\delta(f(x')) = \lim_{\epsilon\to 0} \sum_n \int_{x'_n-\epsilon}^{x'_n+\epsilon} dx' g(x')\delta(f(x')) \tag{9}$$

Nachdem f eine glatte Funktion ist mit zugehöriger Taylorreihe:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n f(x)}{dx^n}|_{x=x_n}(x-x_n)^n = f(x_n) + \frac{df}{dx}|_{x=x_n}(x-x_n) + ... \tag{10}$$

können wir ebenso einsetzen

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx' g(x')\delta(f(x')) &= \lim_{\epsilon\to 0}\sum_n \int_{x'_n-\epsilon}^{x'_n+\epsilon} dx' g(x')\delta(f(x')) \\ = \lim_{\epsilon\to 0}\sum_n \int_{x'_n-\epsilon}^{x'_n+\epsilon} dx' g(x')\delta(f(x_n) &+ \frac{df}{dx'}|_{x'=x_n}(x'-x'_n)) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\sum_n \int_{x'_n-\epsilon}^{x'_n+\epsilon} dx' g(x')\delta(\frac{df}{dx'}|_{x'=x'_n}(x'-x'_n)) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\sum_n \int_{x'_n-\epsilon}^{x'_n+\epsilon} dx' g(x')\frac{1}{|\frac{df}{dx'}|_{x'=x'_n}|}\delta(x'-x'_n) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' g(x')\sum_n \frac{1}{|\frac{df}{dx'}|}\delta(x'-x'_n) \\ &\implies \delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{\left|\frac{df}{dx}\right|}\delta(x-x_n)\end{aligned} \tag{11}$$

die Skalierungseigenschaft verwendet haben.

(iv) Zuguterletzt sehen wir auch, dass

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x')\frac{d\theta(x')}{dx'} &= f(x')\theta(x')|_{x'=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{df(x')}{dx'}\theta(x') \\ &= f(\infty) - \int_0^{\infty} dx' \frac{df}{dx'}(x') \\ &= f(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x')\delta(x') \implies \delta(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}\end{aligned} \tag{12}$$

(b) Sei die Fourier-Darstellung einer Funktion $f(x)$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k)e^{ikx} \tag{13}$$

mit der Fourier-Transformierten $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)e^{-ikx} \tag{14}$$

Folgere nun die folgende Darstellung der δ-Funktion:

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} \tag{15}$$

[1pt]

Wir haben

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k=-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k=-\infty}^{\infty} dk \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'=-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{-ikx'} \right] e^{ikx} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{x'=-\infty}^{\infty} dx' f(x') \int_{k=-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} \\
&= \int_{x'=-\infty}^{\infty} dx' f(x') \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} \\
&= \int_{x'=-\infty}^{\infty} dx' f(x') \delta(x-x') = f(x)
\end{aligned} \tag{16}
$$

(c) Beweise das Parsevalsche Theorem

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |\tilde{f}(k)|^2 \tag{17}
$$

[1pt]

Wir vereinfachen

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)^* f(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx} \right)^* f(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}^*(k) e^{-ikx} f(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}^*(k) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}^*(k) \tilde{f}(k) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dk |\tilde{f}(k)|^2
\end{aligned} \tag{18}
$$

(d) Du bist mittlerweile schon vertraut mit zwei wichtigen Repräsentation/Wellenfunktionen eines abstrakten Zustandsvektors $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Im x und k-Raum haben wir die Beziehungen

$$
\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{\psi}(k) e^{ikx} \tag{19}
$$

$$
\tilde{\psi}(k) = \langle k|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) e^{-ikx} \tag{20}
$$

mittels Fourier-Transformation. Wie generalisieren sich diese Überlegungen auf Dichteoperatoren ρ, die du bereits in der Vorlesung kennengelernt hast? **[2pt]**

Eine allgemeiner Dichteoperator ρ hat die Form

$$\rho = \sum_{j=1}^{n} p_j \left|\psi_j\right\rangle \left\langle\psi_j\right| \tag{21}$$

mit $|\psi_j\rangle \in \mathcal{H}$ und $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$. Wir können die Dichtematrix (die also erst zu einer Matrix in einer bestimmten Basis wird) darstellen durch deren Elemente

$$\rho(x, x') = \langle x| \rho |x'\rangle, \qquad \tilde{\rho}(k, k') = \langle k| \rho |k'\rangle \tag{22}$$

Das bedeutet also

$$\begin{aligned} \rho(x, x') &= \langle x| \rho |x'\rangle \\ &= \langle x| \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \left|\psi_j\right\rangle \left\langle\psi_j\right| \right) |x'\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} p_j \langle x|\psi_j\rangle\langle\psi_j|x'\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} p_j \psi_j(x)\psi_j^*(x') \end{aligned} \tag{23}$$

Ebenso wissen wir

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(k, k') &= \langle k| \rho |k'\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} p_j \tilde{\psi}_j(k)\tilde{\psi}_j^*(k') \end{aligned} \tag{24}$$

Wir setzen nun die Fourier-Darstellungen ein

$$\begin{aligned} \rho(x, x') &= \sum_{j=1}^{n} p_j \psi_j(x)\psi_j^*(x') \\ &= \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{\psi}_j(k) e^{ikx} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \tilde{\psi}_j(k')^* e^{-ik'x'} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} p_j \int_{-\infty}^{\infty} dk dk' \tilde{\psi}_j(k) \tilde{\psi}_j(k')^* e^{i(kx - k'x')} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk dk' e^{i(kx - k'x')} \sum_{j=1}^{n} p_j \tilde{\psi}_j(k) \tilde{\psi}_j(k')^* \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk dk' e^{i(kx - k'x')} \sum_{j=1}^{n} p_j \tilde{\psi}_j(k) \tilde{\psi}_j^*(k') \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk dk' e^{i(kx - k'x')} \tilde{\rho}(k, k') \end{aligned} \tag{25}$$

Somit haben wir

$$\rho(x, x') = \langle x| \rho |x'\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk dk' \tilde{\rho}(k, k') e^{i(kx - k'x')} \tag{26}$$

sowie

$$\tilde{\rho}(k, k') = \langle k| \rho |k'\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' \rho(x, x') e^{-i(kx - k'x')} \tag{27}$$

2 Kohärente Zustände (4pt)

Ihr habt in der Vorlesung kohärente Zustände des Harmonischen Oszillators kennnengelernt

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle . \tag{28}$$

Diese sind essentiell in der Quantenoptik, da diese Zustände beschreiben, in denen der Vernichtungsoperator a einen definitiven Wert annimmt. Dieser Wert kann in der Quantenoptik zum Erwartungswert des Elektromagnetischen Feldes in Bezug gesetzt werden. Hier sollt ihr einige elementare Eigenschaften dieser Zustände ausarbeiten.

- (a) Zeige, dass für zwei komplexe Zahlen α, β das Skalarprodukt der entsprechenden kohärenten Zustände folgende Gleichung erfüllt

$$| \langle \alpha|\beta\rangle |^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2} \tag{29}$$

[2pt]

Wir wollen das Skalarprodukt zwischen zwei kohärenten Zuständen ausrechnen, dafür setzen wir die obige Formel für $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ ein:

$$\begin{aligned}
\langle\beta|\alpha\rangle &= \exp\Big(-\frac{1}{2}(|\beta|^2 + |\alpha|^2)\Big) \sum_{n,m=0}^{\infty} \langle 0| \frac{((\beta^*)a)^m}{m!} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle \\
&= \exp\Big(-\frac{1}{2}(|\beta|^2 + |\alpha|^2)\Big) \sum_{n,m=0}^{\infty} \langle m| \frac{(\beta^*)^m}{\sqrt{m!}} \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\
&= \exp\Big(-\frac{1}{2}(|\beta|^2 + |\alpha|^2)\Big) \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(\beta^*)^m}{\sqrt{m!}} \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} \delta_{mn} \\
&= \exp\Big(-\frac{1}{2}(|\beta|^2 + |\alpha|^2)\Big) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta^*\alpha)^n}{n!} \\
&= \exp\Big(-\frac{1}{2}(|\beta|^2 + |\alpha|^2) + \beta^*\alpha\Big)
\end{aligned} \tag{30}$$

Das Betragsquadrat der letzten Zeile ergibt dann

$$| \langle\beta|\alpha\rangle |^2 = \exp\big(-(|\beta|^2 + |\alpha|^2) + \beta^*\alpha + \beta\alpha^*\big) = \exp\big(-|\alpha - \beta|^2\big), \tag{31}$$

was zu zeigen war.

- (b) Wir definieren die Positions und Ortsoperatoren

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}(a + a^\dagger), \qquad P = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(a - a^\dagger), \tag{32}$$

wobei wir zur Bequemlichkeit $m = \omega = 1$ gesetzt haben. Berechne die Heisenbergsche Unschärferelation für X, P und zeige, dass die Unschärfe in einem kohärenten Zuständ den Minimalwert annimmt **[2pt]**

Wir wissen aus der Vorlesung $a\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$. Wir haben also

$$\langle a\rangle = \langle\alpha|\, a\,|\alpha\rangle = \alpha\,\langle\alpha|\alpha\rangle = \alpha \tag{33}$$

$$\langle a^\dagger\rangle = \langle\alpha|\, a^\dagger\,|\alpha\rangle = \alpha^*\,\langle\alpha|\alpha\rangle = \alpha^* \tag{34}$$

Somit haben wir

$$\langle(a \pm a^\dagger)\rangle = \langle\alpha|\,(a \pm a^\dagger)\,|\alpha\rangle = \alpha \pm \alpha^* \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\langle(a \pm a^\dagger)^2\rangle = \langle\alpha|\,(a \pm a^\dagger)^2\,|\alpha\rangle = \langle\alpha|\,(a^2 + a^{\dagger 2} \pm (aa^\dagger + a^\dagger a))\,|\alpha\rangle &= \langle\alpha|\,(a^2 + a^{\dagger 2} \pm (1 + 2a^\dagger a))\,|\alpha\rangle \\ &= (\alpha^2 + \alpha^{*2} \pm (1 + 2|\alpha|^2))\,\langle\alpha|\alpha\rangle \\ &= \alpha^2 + \alpha^{*2} \pm (1 + 2|\alpha|^2)\end{aligned} \tag{36}$$

Demnach haben wir

$$\begin{aligned}\Delta X^2 = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2 &= \frac{\hbar}{2}\left(\langle(a + a^\dagger)^2\rangle - \langle(a + a^\dagger)\rangle^2\right) \\ &= \frac{\hbar}{2}\left(\alpha^2 + \alpha^{*2} + (1 + 2|\alpha|^2) - (\alpha + \alpha^*)^2\right) \\ &= \frac{\hbar}{2}\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\Delta P^2 = \langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2 &= -\frac{\hbar}{2}\left(\langle(a - a^\dagger)^2\rangle - \langle(a - a^\dagger)\rangle^2\right) \\ &= -\frac{\hbar}{2}\left(\alpha^2 + \alpha^{*2} - (1 + 2|\alpha|^2) - (\alpha - \alpha^*)^2\right) \\ &= \frac{\hbar}{2}\end{aligned} \tag{38}$$

Die Unschärfe nimmt somit in einem kohärenten Zustand den Minimalwert an:

$$\Delta X \Delta P = \frac{\hbar}{2} \tag{39}$$

3 Verschiebungs- und Quetschungsoperatoren (8 pt)

Wir definieren für $\alpha \in \mathbb{C}$ und Leiteroperatoren $\hat{a}, \hat{a}^\dagger : [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = I$ den *Verschiebungsoperator*

$$D(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}. \tag{40}$$

Das Hadamard-Lemma (bzw. die Baker-Campbell-Haussdorf Formel) besagt, dass für Operatoren X, Y folgende Gleichung gilt

$$e^X Y e^{-X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [X, Y]_n. \tag{41}$$

Hierbei haben wir die sogenannten *vernesteten Kommutatoren* genutzt, welche rekursiv definiert sind als

$$[X, Y]_0 = Y, \quad [X, Y]_n = [X, [X, Y]_{n-1}], \; n \in \mathbb{N}. \tag{42}$$

(a) Zeige hiermit, dass folgendes gilt. **[2pt]**

$$D^\dagger(\alpha) \hat{a} D(\alpha) = \hat{a} + \alpha. \tag{43}$$

Hinweis: Zeige zuerst $D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha)$.

Wir sehen sofort:

$$D(\alpha)^\dagger = e^{\alpha^* \hat{a} - \alpha \hat{a}^\dagger} = e^{(-\alpha)\hat{a}^\dagger - (-\alpha)^* \hat{a}} = D(-\alpha) \tag{44}$$

Wir berechnen die ersten paar Kommutatoren

$$[\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, \hat{a}]_0 = \hat{a} \tag{45}$$
$$[\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, \hat{a}]_1 = \alpha [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \tag{46}$$
$$= -\alpha \tag{47}$$
$$[\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, \hat{a}]_{\geq 2} = 0. \tag{48}$$

Offenbar bricht die Reihe nach $n = 1$ schon ab. Damit haben wir also

$$D^\dagger(\alpha) \hat{a} D(\alpha) = e^{-\alpha \hat{a}^\dagger + \alpha^* \hat{a}} \hat{a} e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} \tag{49}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [-\alpha \hat{a}^\dagger + \alpha^* \hat{a}, \hat{a}]_n \tag{50}$$
$$= \hat{a} + \alpha. \tag{51}$$

(b) Zeige hiermit, dass $D(\alpha)|0\rangle$ ein kohärenter Zustand ist und drücke $D(\alpha)|1\rangle$ in kohärenten Zuständen aus. **[1pt]**

Mithilfe der obigen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{a}D(\alpha)|0\rangle &= D(\alpha)D^\dagger(\alpha)\hat{a}D(\alpha)|0\rangle && (52)\\ &= D(\alpha)(\hat{a}+\alpha)|0\rangle && (53)\\ &= \alpha D(\alpha)|0\rangle\,, && (54) \end{aligned}$$

also ist $D(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle$ genau unser gewohnter kohärenter Zustand. Nun schreiben wir $|1\rangle = \hat{a}^\dagger|0\rangle$ und berechnen

$$\begin{aligned} D(\alpha)|1\rangle &= D(\alpha)\hat{a}^\dagger|0\rangle && (55)\\ &= D(\alpha)\hat{a}^\dagger D^\dagger(\alpha)D(\alpha)|0\rangle && (56)\\ &= \Big(D(\alpha)\hat{a}D^\dagger(\alpha)\Big)^\dagger D(\alpha)|0\rangle && (57)\\ &= \Big(D^\dagger(-\alpha)\hat{a}D(-\alpha)\Big)^\dagger D(\alpha)|0\rangle && (58)\\ &= (\hat{a}-\alpha)^\dagger D(\alpha)|0\rangle && (59)\\ &= (\hat{a}-\alpha)^\dagger D(\alpha)|0\rangle && (60)\\ &= (\hat{a}^\dagger-\alpha^*)|\alpha\rangle\,. && (61) \end{aligned}$$

$D(\alpha)|1\rangle$ ist also eine Superposition aus einem kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$, zu dem eine Anregung hinzugefügt wurde und dem kohärenten Zustand selbst.

(c) Wir definieren mit $z\in\mathbb{C}$ den *Quetschungsoperator*

$$S(z) = e^{(z^*\hat{a}^2 - z\hat{a}^{\dagger 2})/2}. \tag{62}$$

Zeige zunächst für $A = (z\hat{a}^{\dagger 2} - z^*\hat{a}^2)/2$, dass folgendes gilt. **[2pt]**

$$[A,\hat{a}]_n = \begin{cases} |z|^n\hat{a}, & n \text{ gerade},\\ -z|z|^{n-1}\hat{a}^\dagger, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Wir haben

$$[A,\hat{a}] = z[\hat{a}^{\dagger 2},\hat{a}]/2 = -z\hat{a}^\dagger, \tag{63}$$

und per Konjugation dieser Gleichung

$$[A,\hat{a}^\dagger] = -z^*\hat{a}. \tag{64}$$

Wir sehen also, dass in der Rekursion mit jeder Anwendung des Kommutators $[A,\cdot]$, $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ sich als Ergebnis abwechslen und immer ein Faktor $-z$ oder $-z^*$ erscheint. Damit erhält man obige Fallunterscheidung.

(d) Zeige hiermit, dass folgendes gilt. **[1pt]**

$$S^\dagger(z)\hat{a}S(z) = \cosh(|z|)\hat{a} - \frac{z}{|z|}\sinh(|z|)\hat{a}^\dagger. \tag{65}$$

Mit dem obigen Ergebnis erhalten wir

$$S^\dagger(z)\hat{a}S(z) = \hat{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{(2n)!} - \hat{a}^\dagger\frac{z}{|z|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{66}$$

$$= \cosh(|z|)\hat{a} - \frac{z}{|z|}\sinh(|z|)\hat{a}^\dagger. \tag{67}$$

(e) Wir definieren das gequetschte Vakuum $|0,z\rangle = S(z)|0\rangle$. Berechne für diesen Zustand mit $z \in (0,1]$ die folgenden Momente. **[1pt]**

$$\langle\hat{x}\rangle, \langle\hat{p}\rangle, \langle\hat{x}^2\rangle, \langle\hat{p}^2\rangle. \tag{68}$$

Es gilt hier $\frac{z}{|z|} = 1$. Mit $\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)$ und $\hat{p} = -i\frac{x_0 m\omega}{\sqrt{2}}(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)$ gilt

$$S^\dagger(z)\hat{x}S(z) = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\Big(\cosh(|z|)\hat{a} - \sinh(|z|)\hat{a}^\dagger + \cosh(|z|)\hat{a}^\dagger - \sinh(|z|)\hat{a}\Big) \tag{69}$$

$$= (\cosh(|z|) - \sinh(|z|))\,\hat{x} \tag{70}$$

$$= e^{-|z|}\hat{x} \tag{71}$$

und analog

$$S^\dagger(z)\hat{p}S(z) = e^{|z|}\hat{p}. \tag{72}$$

Wir haben also

$$\langle\hat{x}\rangle = \langle\hat{p}\rangle = 0 \tag{73}$$

und

$$\langle\hat{x}^2\rangle = e^{-2|z|}\langle 0|\hat{x}^2|0\rangle = e^{-2|z|}\frac{\hbar}{2\omega m}, \tag{74}$$

sowie

$$\langle\hat{p}^2\rangle = e^{2|z|}\langle 0|\hat{p}^2|0\rangle = e^{2|z|}\frac{\hbar\omega m}{2}. \tag{75}$$

Hierbei haben wir die Resultate der letzten Übung eingesetzt.

(f) Überprüfe die Heisenberg'sche Unschärferelation. Wie verhält sich $(\Delta\hat{x})(\Delta\hat{p})$ relativ zum Vakuumzustand? **[1pt]**

$$(\Delta\hat{x})(\Delta\hat{p}) = \frac{\hbar}{2} \tag{76}$$

bleibt unabhängig von z Konstant. Damit haben gequetschte Zustände, genauso wie das Vakuum, minimale Unschärfe.