

1 Schwarzkörperstrahlung revisited (7pt)

Da ihr nun einige Grundlagen der Quantenmechanik kennengelernt habt, können wir ein sehr naives Modell der Schwarzkörperstrahlung im Rahmen der Quantenmechanik betrachten und Einsteins Annahmen von 1905 von einem einfachen Modell herleiten. Hierfür ersetzen wir den Schwarzkörper und seine Umgebung durch zwei harmonische Oszillatoren, wobei einer der Oszillatoren den Schwarzkörper beschreibt, in dem nur eine Mode der Frequenz ω existiert, und die Umgebung über einen weiteren Oszillator der selben Frequenz modelliert wird. Wir betrachten also den Hilbertraum

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B, \quad (1)$$

wobei der Faktor $\mathcal{H}_A$ der Hilbertraum des "Schwarzkörperoszillator" und der andere der Hilbertraum $\mathcal{H}_B$ des "Umgebungsoszillators" ist. Der Gesamthamiltonian ist gegeben durch

$$H = H_A + H_B = \hbar\omega(a_A^\dagger a_A + a_B^\dagger a_B), \quad (2)$$

wobei a_A, a_B die Vernichtungsoperatoren für $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ sind¹. Nun betrachten wir die Situation, dass beide Oszillatoren im thermischen Gleichgewicht der Temperatur $T = \frac{1}{k_B\beta}$ sind. Um dies zu beschreiben, nehmen wir an, dass der Gesamtzustand durch

$$|\Psi\rangle = C \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n \frac{\hbar\omega}{2}} |n\rangle_A |n\rangle_B, \quad (3)$$

gegeben ist, wobei $|n\rangle_{A/B}$ der n -te angeregte Zustand des Oszillators A, B ist.²

- (a) Berechne die Normalisierungskonstante C , damit $|\Psi\rangle$ Norm 1 hat. [1pt]
- (b) Berechne die reduzierte Dichtematrix für den Schwarzkörper-Oszillator

$$\rho_A = \text{Tr}_{\mathcal{H}_B}(|\Psi\rangle\langle\Psi|) \quad (4)$$

und zeige, dass der Zustand Ψ verschränkt ist *Tipp: 1) Die partielle Spur im Falle eines unendlichdimensionalen Raumes hat die gleiche Formel wie für endlichdimensionale Räume, nur dass man nun über unendlich viele Zustände summiert, anstatt endlich viele. 2) Eine hinreichende Bedingung dafür, dass Ψ unverschränkt ist, dass für die reduzierte Dichtematrix ρ gilt $\rho^2 = \rho$. [2pt]*

- (c) Berechne die Zeitentwicklung der reduzierten Dichtematrix

$$\rho_A(t) = U_A(t, t_0) \rho_A U_A(t, t_0)^\dagger \quad (5)$$

, wobei U_A der Zeitentwicklungsoperator der durch H_A definiert ist, ist.³[2pt] *Tipp: Ihr habt die Zeitentwicklung der Erzeuger und Vernichter in Blatt 5 Aufgabe 4c schon ausgerechnet.*

¹Analog zu Aufgabe 1 aus Blatt 6

²Warum dieser Zustand ein thermisches Gleichgewicht beschreibt ist an dieser Stelle irrelevant

³Dies funktioniert in diesem Beispiel, weil der Gesamthamiltonian $H_A + H_B$ ist und die einzelnen Terme auf unterschiedliche Systeme wirken.

- (d) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass der Schwarzkörper $\mathcal{H}_A$ im n -ten angeregten Zustand ist und bestimme den Erwartungswert der Energie H_A als Funktion der Zeit.

$$\langle H_A(t) \rangle = \text{Tr}_A(\rho_A(t)H) \quad (6)$$

Vergleiche das Ergebnis für die Wahrscheinlichkeit des Zustandes und den Erwartungswert der Energie mit Einsteins Ergebnissen aus Blatt 1 Aufgabe 1b. **[2pt]**

2 Gemischte Zustände 1 (4pt)

- (a) Sind die folgenden Matrizen gültige Dichtematrizen? Begründe deine Antwort jeweils kurz. **[1.5pt]**

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Beschreibt die folgende Dichtematrix einen reinen oder einen gemischten Zustand? **[1pt]**

$$\rho = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (c) Als Beispiel eines verschränkten Zustandes habt ihr in der Vorlesung den Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \in \mathbb{C}^4$$

kennengelernt.

1. Berechne die Matrixdarstellung des Dichteoperators $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ in der Standardbasis ($|00\rangle \doteq e_1$, $|01\rangle \doteq e_2$, $|10\rangle \doteq e_3$, $|11\rangle \doteq e_4$). **[0.5pt]**
2. Betrachte nun den folgenden gemischten Zustand aus $|\varphi_1\rangle = |00\rangle$ und $|\varphi_2\rangle = |11\rangle$:

$$\phi = \frac{1}{2} |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + \frac{1}{2} |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|$$

Berechne erneut die Matrixdarstellung von ϕ in derselben Basis wie zuvor und vergleiche die beiden Matrizen von ρ und ϕ . Wie unterscheiden sich die Matrizen, und wie kann man die Unterschiede interpretieren? **[1pt]**

3 Gemischte Zustände 2 (8pt)

Betrachte einen Versuchsaufbau, bei dem ein Apparat den Zustand eines Quantensystems mit drei Leveln präparieren soll. Der Hilbertraum ist somit $\mathbb{C}^3$. Im Anschluss an diese

Präparation führen wir eine Messung der Observablen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

durch.

- (a) Der Präparationsaparat hat einen Drehknopf, der es erlaubt einen der drei Zustände

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{oder } |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (8)$$

zu präparieren. Berechne den Erwartungswert der Observable A in diesen drei Zuständen. **[2pt]**

- (b) Die Maschine habe nun einen Wackelkontakt, sodass in der Stellung i der gewünschte Zustand $|\psi_i\rangle$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit p , die übrigen Zustände jedoch mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1-p}{2}$ präpariert werden. Verwende das Ergebnis aus (a) um den Ausdruck für den Erwartungswert der Observablen A für $i = 1$ zu bestimmen. **[2pt]**
- (c) Beschreibe die in (b) beschriebene experimentelle Situation für $i = 1$ durch einen Dichteoperator und zeige, dass dies auf denselben Erwartungswert führt. **[2pt]**
- (d) Betrachte nun die kohärente Superposition der drei Zustände:

$$|\phi\rangle = \sqrt{p} |\psi_1\rangle + \sqrt{\frac{1-p}{2}} |\psi_2\rangle + \sqrt{\frac{1-p}{2}} |\psi_3\rangle \quad (9)$$

Welche zusätzlichen Terme tragen in diesem Zustand im Unterschied zum gemischten Zustand von (c) zum Erwartungswert bei? **[2pt]**