1 Schwarzkörperstrahlung revisited (7pt)

Da ihr nun einige Grundlagen der Quantenmechanik kennengelernt habt, können wir ein sehr naives Modell der Schwarzkörperstrahlung im Rahmen der Quantenmechanik betrachten und Einsteins Annahmen von 1905 von einem einfachen Modell herleiten. Hierfür ersetzen wir den Schwarzkörper und seine Umgebung durch zwei harmonische Oszillatoren, wobei einer der Oszillatoren den Schwarzkörper beschreibt, in dem nur eine Mode der Frequenz ω existiert, und die Umgebung über einen weiteren Oszillator der selben Frequenz modelliert wird. Wir betrachten also den Hilbertraum

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B, \tag{1}$$

wobei der Faktor $\mathcal{H}_A$ der Hilbertraum des "Schwarzkörperoszillator" und der andere der Hilbertraum $\mathcal{H}_B$ des "Umgebungsoszillators" ist. Der Gesamthamiltonian ist gegeben durch

$$H = H_A + H_B = \hbar\omega(a_A^\dagger a_A + a_B^\dagger a_B), \tag{2}$$

wobei a_A, a_B die Vernichtungsoperatoren für $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ sind [1]. Nun betrachten wir die Situation, dass beide Oszillatoren im thermischen Gleichgewicht der Temperatur $T = \frac{1}{k_B \beta}$ sind. Um dies zu beschreiben, nehmen wir an, dass der Gesamtzustand durch

$$|\Psi\rangle = C \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n \frac{\hbar\omega}{2}} |n\rangle_A |n\rangle_B\,, \tag{3}$$

gegeben ist, wobei $|n\rangle_{A/B}$ der n-te angeregte Zustand des Oszillators A, B ist. [2]

(a) Berechne die Normalisierungskonstante C, damit $|\Psi\rangle$ Norm 1 hat. **[1pt]**

Wir berechnen das Skalarprodukt

$$1 = \langle\Psi|\Psi\rangle = C^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-\beta(n+m)\frac{\hbar\omega}{2}} \langle mm|nn\rangle = C^2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\hbar\omega} = \frac{C^2}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \tag{4}$$

Somit finden wir

$$C = \sqrt{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}. \tag{5}$$

[[1pt]]

(b) Berechne die reduzierte Dichtematrix für den Schwarzkörper-Oszillator

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B}(|\Psi\rangle\langle\Psi|) \tag{6}$$

und zeige, dass der Zustand Ψ verschränkt ist *Tipp: 1) Die partielle Spur im Falle eines unendlichdimensionalen Raumes hat die gleiche Formel wie für eindlichdimensionale Räume, nur dass man nun über unendlich viele Zustände summiert,*

[1] Analog zu Aufgabe 1 aus Blatt 6

[2] Warum dieser Zustand ein thermisches Gleichgewicht beschreibt ist an dieser Stelle irrelevant

anstatt endlich viele. 2) Eine hinreichende Bedinung dafür, dass Ψ unverschränkt ist, dass für die reduzierte Dichtematrix ρ gilt $\rho^2 = \rho$.

Wir berechnen

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}(n+m)} |nn\rangle\langle mm| \tag{7}$$

Ausführen der partiellen Spur ergibt

$$\begin{aligned}\rho_A &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle k|_B \Big((1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}(n+m)} |nn\rangle\langle mm|\Big) |k\rangle_B \\ &= (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{m,k,n=0}^{\infty} e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}(n+m)} |n\rangle\langle m| \delta_{nk}\delta_{mk}\end{aligned} \tag{8}$$

Ausführen der Summen über k, m ergibt dann

$$\rho_A = (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} |n\rangle\langle n| \tag{9}$$

[1pt] Um zu zeigen, dass der Ursprungszustand verschränkt ist, nutzen wir den Tipp und berechnen ρ_A^2. Dies ist

$$\begin{aligned}\rho_A^2 &= (1 - e^{-\beta\hbar\omega})^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+m)} |n\rangle\langle n|m\rangle\langle m| \\ &= (1 - e^{-\beta\hbar\omega})^2 \sum_{n}^{\infty} e^{-2\beta\hbar\omega n} |n\rangle\langle n|\,.\end{aligned} \tag{10}$$

Da der Operator schon diagonalisiert ist, sehen wir, dass der Eigenwert von ρ_A^2 zum Zustand $|n\rangle$ durch

$$\lambda_n = (1 - e^{-\beta\hbar\omega})^2 e^{-2\beta\hbar\omega n}, \tag{11}$$

gegeben ist, was das Quadrat des Eigenwertes von ρ_A zum gleichen Zustand $|n\rangle$ ist. Dadurch sind die Operatoren ρ_A und ρ_A^2 unterschiedlich, da ihre Eigenwerte zum gleichen Eigenvektor unterschiedlich sind. **[1pt]**. **[2pt]**

(c) Berechne die Zeitentwicklung der reduzierten Dichtematrix

$$\rho_A(t) = U_A(t, t_0)\rho_A U_A(t, t_0)^\dagger, \tag{12}$$

wobei U_A der Zeitentwicklungsoperator der durch H_A definiert ist, ist.[3] **[2pt]** *Tipp: Ihr habt die Zeitentwicklung der Erzeuger und Vernichter in Blatt 5 Aufgabe 4c schon ausgerechnet.*

[3]Dies funktioniert in diesem Beispiel, weil der Gesamthamiltonian $H_A + H_B$ ist und die einzelnen Terme auf unterschiedliche Systeme wirken.

Die Dichtematrix ρ_A wirkt auf das System $\mathcal{H}_A$, dessen Zeitentwicklung mit dem Hamiltonian H_A passiert[4]. ρ_A ist oben schon in diagonaler Form aufgeschrieben worden, wobei die Eigenbasis von ρ_A und die Eigenbasis von H_A schon übereinstimmen. Damit haben wir für die Zeitentwicklung auf dem System A Hilbertraum

$$U_A(t, t_0) = e^{-iH_A(t-t_0)}, \tag{13}$$

[1pt] Wir können deswegen die Zeitentwicklung von ρ_A allein durch Konjugation mit H_A ausrechnen und wir finden

$$\begin{aligned}
\rho_A(t) &= e^{-i(t-t_0)H_A}\rho_A e^{i(t-t_0)H_A} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} e^{-i(t-t_0)H_A} |n\rangle \langle n| e^{i(t-t_0)H_A} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} e^{-i(t-t_0)\hbar\omega n} |n\rangle \langle n| e^{i(t-t_0)\hbar\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} |n\rangle \langle n| \\
&= \rho_A
\end{aligned} \tag{14}$$

Wir sehen, dass in diesem Fall ρ_A zeitunabhängig ist **[1pt]**

(d) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass der Schwarzkörper $\mathcal{H}_A$ im n-ten angeregten Zustand ist und bestimme den Erwartungswert der Energie H_A als Funktion der Zeit:

$$\langle H_A(t)\rangle = \mathrm{Tr}_A(\rho_A(t)H) \tag{15}$$

Vergleiche das Ergebnis für die Wahrscheinlichkeit des Zustandes und den Erwartungswert der Energie mit Einsteins Ergebnissen aus Blatt 1 Aufgabe 1b. **[2pt]** Die Wahrscheinlichkeit, dass der Schwarzkörper im n-ten angeregten Zustand ist, ist gleich dem Erwartungswert des Operators $|n\rangle\langle n|$, also

$$\begin{aligned}
P(n) &= \mathrm{Tr}(\rho_A |n\rangle \langle n|) \\
&= (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{k,m=0}^{\infty} \langle k| e^{-\beta\hbar\omega m} |m\rangle \langle m| |n\rangle \langle n| |k\rangle \\
&= (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{k,m=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega m}\delta_{km}\delta_{mn}\delta_{nk} = (1 - e^{-\beta\hbar\omega})e^{-\beta\hbar\omega n}.
\end{aligned} \tag{16}$$

[4] Dies stimmt in diesem Fall, weil der Hamiltonian die Form $H_A + H_B$ hat

Damit gilt

$$\begin{aligned}\langle H_A \rho_A \rangle &= \sum_n \hbar\omega n \mathrm{Tr} \rho_A |n\rangle \langle n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \hbar\omega n (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) e^{-\beta\hbar\omega n} \\ &= \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1},\end{aligned} \tag{17}$$

wobei wir die letzte Summe von Blatt 1 Aufgabe 5 b entnahmen. **[1,5pt]** Ein Vergleich mit der Aufgabe 5 von Blatt 1 zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit P_n die selbe ist, wie Einstein für die Anregung eines Zustandes der Energie $E_n = \hbar\omega n$ annahm und die mittlere Energie ebenfalls übereinstimmt. In diesem Sinne, beschreibt unser Modell eine "Herleitung" seiner Annahmen aus quantenmechanischen Überlegungen.

2 Gemischte Zustände 1 (4pt)

(a) Sind die folgenden Matrizen gültige Dichtematrizen? Begründe deine Antwort jeweils kurz. **[1.5pt]**

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ja, nein, ja. ρ_1 und ρ_3 erfüllen $\mathrm{tr}(\rho) = 1$ und $\rho \geq 0$, ρ_2 hat Spur 2.

(b) Beschreibt die folgende Dichtematrix einen reinen oder einen gemischten Zustand? **[1pt]**

$$\rho = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für reine Zustände gilt $\mathrm{tr}\left(\rho^2\right) = \mathrm{tr}(\rho) = 1$. Hier ist

$$\rho^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

sodass $\mathrm{tr}\left(\rho^2\right) = \frac{5}{9} < 1$, ρ also gemischt ist.

(c) Als Beispiel eines verschränkten Zustandes habt ihr in der Vorlesung den Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \in \mathbb{C}^4$$

kennengelernt.

1. Berechne die Matrixdarstellung des Dichteoperators $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ in der Standardbasis ($|00\rangle \doteq e_1$, $|01\rangle \doteq e_2$, $|10\rangle \doteq e_3$, $|11\rangle \doteq e_4$). **[0.5pt]**

   Wir haben
   $$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\left(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 11|\right) \tag{19}$$
   In der gewünschten Matrixdarstellung erhalten wir
   $$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

2. Betrachte nun den folgenden gemischten Zustand aus $|\varphi_1\rangle = |00\rangle$ und $|\varphi_2\rangle = |11\rangle$:
   $$\phi = \frac{1}{2}|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + \frac{1}{2}|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|$$
   Berechne erneut die Matrixdarstellung von ϕ in derselben Basis wie zuvor und vergleiche die beiden Matrizen von ρ und ϕ. Wie unterscheiden sich die Matrizen, und wie kann man die Unterschiede interpretieren? **[1pt]**

   Die Matrixdarstellung ist (mit derselben Basis wie zuvor):
   $$\phi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$
   Worauf ich hier hinaus will: 1. "Oh, es gibt off-diagonal elements!" (in ρ), und dann 2., die Basisabhängigkeit derselben erklären. Ich hatte erst überlegt, als weiteren Aufgabenteil die beiden states in der Bell basis zu entwickeln, aber vielleicht ist der Lerneffekt größer, wenn viele Leute erstmal den Fehler machen und die Basisabhängigkeit übersehen.

3 Gemischte Zustände 2 (8pt)

Betrachte einen Versuchsaufbau, bei dem ein Apparat den Zustand eines Quantensystems mit drei Leveln präparieren soll. Der Hilbertraum ist somit $\mathbb{C}^3$. Im Anschluss an diese Präparation führen wir eine Messung der Observablen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{22}$$

durch.

(a) Der Präparationsaparat hat einen Drehknopf, der es erlaubt einen der drei Zustände

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix}, \qquad \text{oder } |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix} \tag{23}$$

zu präparieren. Berechne den Erwartungswert der Observable A in diesen drei Zuständen. **[2pt]**

Die Erwartungswerte in diesen reinen Zuständen sind gegeben durch $\langle A\rangle_{\psi_i} = \langle\psi_i| A |\psi_i\rangle$ für $i = 1, 2, 3$. Daher:

$$\langle A\rangle_{\psi_1} = \langle\psi_1| A |\psi_1\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 1 \tag{24}$$

$$\langle A\rangle_{\psi_2} = \langle\psi_2| A |\psi_2\rangle = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix} = \frac{2}{3} \tag{25}$$

$$\langle A\rangle_{\psi_3} = \langle\psi_2| A |\psi_3\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix} = \frac{1}{2} \tag{26}$$

(b) Die Maschine habe nun einen Wackelkontakt, sodass in der Stellung i der gewünschte Zustand $|\psi_i\rangle$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit p, die übrigen Zustände jedoch mit der Wahrscheinlichket $\frac{1-p}{2}$ präpariert werden. Verwende das Ergebnis aus (a) um den Ausdruck für den Erwartungswert der Observablen A für $i = 1$ zu bestimmen. **[2pt]**

Der Zustand $|\psi_1\rangle$ wird also mit Wahrscheinlichkeit p, die anderen Zustände mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1-p}{2}$ präpariert. Wir können den Erwartungswert somit berechnen als

$$\begin{aligned}\langle A\rangle &= \sum_{i=1}^{3} p_j \langle\psi_i|A|\psi_i\rangle \\ &= p\langle A\rangle_{\psi_1} + \frac{1-p}{2}(\langle A\rangle_{\psi_2} + \langle A\rangle_{\psi_3}) \\ &= p + \frac{1-p}{2}(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}) = p + \frac{7(1-p)}{12} = \frac{5p+7}{12}\end{aligned} \tag{27}$$

(c) Beschreibe die in (b) beschriebene experimentelle Situation für $i = 1$ durch einen Dichteoperator und zeige, dass dies auf denselben Erwartungswert führt. **[2pt]**

Wenn wir $|\psi_i\rangle$ mit $i = 1, 2, 3$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit p_i präparieren, dann ist der assoziierte Dichteoperator

$$\begin{aligned}\rho = \sum_{i=1}^{3} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| &= p|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \frac{1-p}{2}\left(|\psi_2\rangle\langle\psi_2| + |\psi_3\rangle\langle\psi_3|\right) \\ &= p\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{1-p}{2}\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -i & 1\\ i & 1 & i\\ 1 & -i & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -i\\ 0 & i & 1\end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix}\frac{2p+1}{6} & \frac{3p-i(1-p)}{6} & \frac{1-p}{6}\\ \frac{3p+i(1-p)}{6} & \frac{p+5}{12} & \frac{-i(1-p)}{12}\\ \frac{1-p}{6} & \frac{i(1-p)}{12} & \frac{5(1-p)}{12}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{28}$$

Nachdem

$$\begin{aligned}A\rho &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2p+1}{6} & \frac{3p-i(1-p)}{6} & \frac{1-p}{6}\\ \frac{3p+i(1-p)}{6} & \frac{p+5}{12} & \frac{-i(1-p)}{12}\\ \frac{1-p}{6} & \frac{i(1-p)}{12} & \frac{5(1-p)}{12}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\frac{5p+1+i(1-p)}{6} & \frac{7p+5-2i(1-p)}{12} & \frac{(2-i)(1-p)}{12}\\ \frac{-p+1-i(1-p)}{6} & \frac{5p-2i(1-p)-5}{12} & \frac{(2+i)(1-p)}{12}\\ \frac{1-p}{3} & \frac{i(1-p)}{6} & \frac{5(1-p)}{6}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{29}$$

können wir nun den Erwartungswert berechnen:

$$\begin{aligned}\langle A\rangle = \mathrm{tr}(A\rho) = \frac{5p+1+i(1-p)}{6} + \frac{5p-2i(1-p)-5}{12} + \frac{5(1-p)}{6} \\ = \frac{5p+7}{12}\end{aligned} \tag{30}$$

Demnach erhalten wir, wie erwartet, das gleiche Ergebnis.

(d) Betrachte nun die kohärente Superposition der drei Zustände:

$$|\phi\rangle = \sqrt{p}\,|\psi_1\rangle + \sqrt{\frac{1-p}{2}}\,|\psi_2\rangle + \sqrt{\frac{1-p}{2}}\,|\psi_3\rangle \tag{31}$$

Welche zusätzlichen Terme tragen in diesem Zustand im Unterschied zum gemischten Zustand von (c) zum Erwartungswert bei? **[2pt]**

Nun haben wir einen reinen Zustand. Wir berechnen den Erwartungswert wie folgt:

$$\begin{aligned}\langle A\rangle_\phi &= \langle\phi| A |\phi\rangle \\ &= \left(\sqrt{p}\,\langle\psi_1| + \sqrt{\frac{1-p}{2}}\,\langle\psi_2| + \sqrt{\frac{1-p}{2}}\,\langle\psi_3|\right) A \left(\sqrt{p}\,|\psi_1\rangle + \sqrt{\frac{1-p}{2}}\,|\psi_2\rangle + \sqrt{\frac{1-p}{2}}\,|\psi_3\rangle\right) \\ &= \left(\sqrt{p}\,\langle\psi_1| + \sqrt{\frac{1-p}{2}}\,\langle\psi_2| + \sqrt{\frac{1-p}{2}}\,\langle\psi_3|\right)\left(\sqrt{p}A\,|\psi_1\rangle + \sqrt{\frac{1-p}{2}}A\,|\psi_2\rangle + \sqrt{\frac{1-p}{2}}A\,|\psi_3\rangle\right) \\ &\equiv p\langle A\rangle_{\psi_1} + \frac{1-p}{2}\langle A\rangle_{\psi_2} + \frac{1-p}{2}\langle A\rangle_{\psi_3} + \chi \\ &= \langle A\rangle_\rho + \chi\end{aligned} \tag{32}$$

wobei

$$\chi = \sqrt{\frac{p(1-p))}{2}}(\langle\psi_1| A |\psi_2\rangle + \langle\psi_1| A |\psi_3\rangle + \langle\psi_2| A |\psi_1\rangle + \langle\psi_3| A |\psi_1\rangle) + \frac{1-p}{2}(\langle\psi_2| A |\psi_3\rangle + \langle\psi_3| A |\psi_2\rangle) \tag{33}$$

die zusätzlichen Terme im Vergleich zu (c) sind. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}\chi = \sqrt{\frac{p(1-p))}{2}}(\langle\psi_1| A |\psi_2\rangle + \langle\psi_1| A |\psi_3\rangle + \langle\psi_2| A |\psi_1\rangle + \langle\psi_3| A |\psi_1\rangle) \\ + \frac{1-p}{2}(\langle\psi_2| A |\psi_3\rangle + \langle\psi_3| A |\psi_2\rangle) \\ = \sqrt{\frac{p(1-p))}{2}}\sqrt{\frac{8}{3}} + \frac{1-p}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\end{aligned} \tag{34}$$