

Diese Probeklausur dient zur Übung und Vorbereitung. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Arbeite so, als würden die zwei besten Beispiele gewertet werden. Du kannst also maximal 40 Punkte erreichen. Beachte, dass die tatsächliche Klausur davon abweichen kann.

1 Dynamische Invarianten (20pt)

Die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (1)$$

beschreibt, wie sich quantenmechanische Zustandsvektoren $|\psi(t)\rangle$ entwickeln, wenn der Hamilton-Operator $\hat{H}(t)$ zeitabhängig ist.

In dieser Aufgabe betrachten wir eine sogenannte dynamische Invariante $\hat{I}(t)$, die nützlich ist, um exakte Lösungen der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung zu finden. Eine dynamische Invariante $\hat{I}(t)$ ist ein Operator, der (1) hermitesch ist, und (2) eine Erhaltungsgröße ist, d.h. dass die folgende Gleichung gilt:

$$\frac{d\hat{I}(t)}{dt} \equiv \frac{\partial \hat{I}(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{I}(t), \hat{H}(t)] = 0 \quad (2)$$

- (a) Zeige, dass aus der Definition der dynamischen Invarianten $\hat{I}(t)$ folgt, dass, wenn $|\psi(t)\rangle$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung ist, auch $|\psi_I(t)\rangle = \hat{I}(t) |\psi(t)\rangle$ eine Lösung ist. **[5pt]**

Nehme weiters an, dass die Invariante $\hat{I}(t)$ aus einer vollständigen Menge kommutierender Observablen besteht, sodass es eine vollständige Menge von orthonormalen Eigenzuständen $|\lambda, t\rangle$ mit zu $\hat{I}(t)$ zugehörigen reellen Eigenwerten λ gibt. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die Eigenzustände nicht entartet sind. Es gilt:

$$\begin{aligned} \hat{I}(t) |\lambda, t\rangle &= \lambda |\lambda, t\rangle \\ \sum_{\lambda} |\lambda, t\rangle \langle \lambda, t| &= 1 \\ \langle \lambda', t | \lambda, t \rangle &= \delta_{\lambda, \lambda'} \end{aligned} \quad (3)$$

- (b) Zeige, dass die Eigenwerte λ von $\hat{I}(t)$ zeitunabhängig sind, i.e., $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0$. Du musst hierzu $\langle \lambda', t | \frac{\partial \hat{I}(t)}{\partial t} | \lambda, t \rangle$ auf zwei unterschiedliche Arten berechnen und die beiden Ausdrücke gleichsetzen, sowie am Ende $\lambda' = \lambda$ setzen. Die Produktregel wird dir hierbei hilfreich sein, wenn du $\frac{\partial}{\partial t} [\hat{I}(t) |\lambda, t\rangle]$ berechnest. **[9pt]**
- (c) Definiere nun $|\lambda, t\rangle_{\alpha} = \exp[i\alpha \lambda(t)] |\lambda, t\rangle$. Dies ist ein Eigenzustand von $\hat{I}(t)$, i.e., $\hat{I}(t) |\lambda, t\rangle_{\alpha} = \lambda |\lambda, t\rangle_{\alpha}$. Fordere nun, dass $|\lambda, t\rangle_{\alpha}$ eine Lösung der zeitabhängigen

Schrödinger-Gleichung ist und leite den folgenden formalen Ausdruck für die Phase $\alpha_\lambda(t)$ her:

$$\alpha_\lambda(t) = \int_0^t dt' \langle \lambda, t' | \left[i \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{\hbar} \hat{H}(t') \right] | \lambda, t' \rangle \quad (4)$$

[6pt]

2 Gekoppelte Oszillatoren (20pt)

Betrachte zwei harmonische Oszillatoren a_1, a_2 mit freiem Hamiltonian

$$H^0 = \hbar\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega_2 a_2^\dagger a_2, \quad (5)$$

wobei $\omega_2 = \pi\omega_1$. Der Hilbertraum ist also $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})_1 \otimes L^2(\mathbb{R})_2$ und die einzelnen Oszillatoren wirken auf die Standardbasis $|n\rangle_i \in L^2(\mathbb{R})_i$ eines Oszillators über

$$a_i |n\rangle_i = \sqrt{n_i} |n-1\rangle_i, \quad a_i^\dagger |n\rangle_i = \sqrt{n_i+1} |n+1\rangle_i, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Diese Oszillatoren werden durch eine Interaktion gekoppelt, sodass der Gesamthamiltonian durch

$$H = H^0 + H^I, \quad H^I = \lambda(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) \quad (7)$$

gegeben ist. Die Änderung der Energie eines Eigenzustandes $|\psi\rangle$ von H^0 in erster und zweiter Ordnung der Störungstheorie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Delta E_\psi^{(1)} &= \langle \psi | H^I | \psi \rangle \\ \Delta E_\psi^{(2)} &= \sum_{\psi'} \frac{|\langle \psi' | H^I | \psi \rangle|^2}{E' - E}, \end{aligned} \quad (8)$$

wobei die Summe im Term zweiter Ordnung über alle Zustände anderer Energieeigenwerte geht.

- Was sind die Eigenvektoren und das Spektrum des freien Hamiltonians H^0 ? Ist das Spektrum entartet? [4pt]
- Berechne die Matrixelemente $\langle \psi' | H^I | \psi \rangle$ für alle Paare von Eigenvektoren ψ', ψ von H^0 . [4pt]
- Berechne die Änderung der Energie eines Eigenzustandes in erster Ordnung der Störungstheorie. [3pt]
- Berechne die Änderung der Energie eines Eigenzustandes in zweiter Ordnung der Störungstheorie. Für welche Zustände ist die Änderung so, dass sich die Energie vergrößert? [6pt]
- Betrachte nun eine allgemeine Störung der Form $V = \lambda((a_1^\dagger)^k a_2^l + (a_2^\dagger)^k a_1^l)$. Für welche ganzen Zahlen $k, l \geq 0$ ergibt sich eine nichtverschwindende Änderung der Energie in erster Ordnung der Störungstheorie? [3pt]

3 Symmetrien im Heisenbergbild (20pt)

- (a) Erkläre wie das Heisenbergbild definiert wird und bestimme die Bewegungsgleichung eines Operators im Heisenbergbild. **[5pt]**
- (b) Unter welcher Bedingung ist eine Observable, die nicht explizit von der Zeit abhängt, erhalten? **[2pt]**
- (c) Wir betrachten einen Hamiltonoperator der Form $H(r, \mathbf{L}^2, \mathbf{S}^2)$, wo r die Radialkomponente ist, $\mathbf{L}$ der Drehimpulsoperator und $\mathbf{S}$ der Spinoperator. Drücke die Komponenten von $\mathbf{L}$ durch Differentialoperatoren aus und berechne $[\mathbf{L}, r]$. Unter Benutzung von:

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \quad (9)$$

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x \quad (10)$$

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y, \quad (11)$$

zeige, dass:

$$[\mathbf{L}^2, \mathbf{L}] = 0 \quad (12)$$

gilt (Zeige es für eine Komponente und argumentiere mit Symmetrie). Schließe daraus, dass der Drehimpuls erhalten ist. **[6pt]**

- (d) Die Eigenzustände von H_0 nehmen die Form $|n, l, m, s, m_s\rangle$, wobei $|l, m\rangle$ der Drehimpulszustand aus D_l ist und $|s, m_s\rangle$ den Spinzustand aus D_s beschreibt (m_s ist der Eigenwert von S_z , m der Eigenwert von L_z). Von welchen der Quantenzahlen n, l, m, s, m_s kann der Energieeigenwert $E(n, l, m, s, m_s)$ **nicht** abhängen? **[2pt]**
- .
- (e) Nun betrachte den modifizierten Operator:

$$H_1 = H_0 + \kappa \mathbf{L} \mathbf{S}, \quad (13)$$

wo κ eine Konstante ist. Was sind die Eigenwerte von H_1 auf dem Vektorraum, der von den Zuständen $|n, l, m, s, m_s\rangle$ aufgespannt wird? Von welchen Kombinationen der Quantenzahlen können die Eigenwerte von H_1 **nicht** abhängen? **[5pt]**