Diese Probeklausur dient zur Übung und Vorbereitung. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Arbeite so, als würden die zwei besten Beispiele gewertet werden. Du kannst also maximal 40 Punkte erreichen. Beachte, dass die tatsächliche Klausur davon abweichen kann.

1 Dynamische Invarianten (20pt)

Die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle \tag{1}$$

beschreibt, wie sich quantenmechanische Zustandsvektoren $|\psi(t)\rangle$ entwickeln, wenn der Hamilton-Operator $\hat{H}(t)$ zeitabhängig ist.

In dieser Aufgabe betrachten wir eine sogenannte dynamische Invariante $\hat{I}(t)$, die nützlich ist, um exakte Lösungen der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung zu finden. Eine dynamische Invariante $\hat{I}(t)$ ist ein Operator, der (1) hermitesch ist, und (2) eine Erhaltungsgröße ist, d.h. dass die folgende Gleichung gilt:

$$\frac{d\hat{I}(t)}{dt} \equiv \frac{\partial\hat{I}(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{I}(t), \hat{H}(t)] = 0 \tag{2}$$

(a) Zeige, dass aus der Definition der dynamischen Invarianten $\hat{I}(t)$ folgt, dass, wenn $|\psi(t)\rangle$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung ist, auch $|\psi_I(t)\rangle = \hat{I}(t)|\psi(t)\rangle$ eine Lösung ist. **[5pt]**

Nachdem $\frac{d\hat{I}(t)}{dt}|\psi(t)\rangle = 0$, erhalten wir

$$\frac{\partial\hat{I}(t)}{\partial t}|\psi(t)\rangle = -\frac{1}{i\hbar}[\hat{I}(t), \hat{H}(t)]|\psi(t)\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{I}(t)\hat{H}(t)|\psi(t)\rangle - \hat{H}(t)\hat{I}(t)|\psi(t)\rangle\right] \tag{3}$$

[+2pt] Nachdem $|\psi(t)\rangle$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung ist, erhalten wir weiters:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{I}(t)}{\partial t}|\psi(t)\rangle &= -\frac{1}{i\hbar}\hat{I}(t)\hat{H}(t)|\psi(t)\rangle + \frac{1}{i\hbar}\hat{H}(t)\hat{I}(t)|\psi(t)\rangle \\ &= -\frac{1}{i\hbar}\hat{I}(t)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle\right) + \frac{1}{i\hbar}\hat{H}(t)\hat{I}(t)|\psi(t)\rangle \\ &= -\hat{I}(t)\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle + \frac{1}{i\hbar}\hat{H}(t)\hat{I}(t)|\psi(t)\rangle\end{aligned} \tag{4}$$

[+1,5pt] Damit berechnen wir nun $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_I(t)\rangle$:

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_I(t)\rangle &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[\hat{I}(t)|\psi(t)\rangle\right] \\
&= i\hbar\frac{\partial \hat{I}(t)}{\partial t}|\psi(t)\rangle + i\hbar\hat{I}(t)\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle \\
&= i\hbar\left(-\hat{I}(t)\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle + \frac{1}{i\hbar}\hat{H}(t)\hat{I}(t)|\psi(t)\rangle\right) + i\hbar\hat{I}(t)\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle \\
&= \hat{H}(t)\hat{I}(t)|\psi(t)\rangle \\
&= \hat{H}(t)|\psi_I(t)\rangle
\end{aligned} \tag{5}$$

Damit haben wir gezeigt, dass auch $|\psi_I(t)\rangle = \hat{I}(t)|\psi(t)\rangle$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung ist. **[+1,5pt]**

Nehme weiters an, dass die Invariante $\hat{I}(t)$ aus einer vollständigen Menge kommutierender Observablen besteht, sodass es eine vollständige Menge von orthonormalen Eigenzuständen $|\lambda, t\rangle$ mit zu $\hat{I}(t)$ zugehörigen reelen Eigenwerten λ gibt. Wir nehmen der Einfachkeit halber an, dass die Eigenzustände nicht entartet sind. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{I}(t)|\lambda, t\rangle &= \lambda|\lambda, t\rangle \\
\sum_\lambda |\lambda, t\rangle\langle\lambda, t| &= 1 \\
\langle\lambda', t|\lambda, t\rangle &= \delta_{\lambda,\lambda'}
\end{aligned} \tag{6}$$

(b) Zeige, dass die Eigenwerte λ von $\hat{I}(t)$ zeitunabhängig sind, i.e., $\frac{\partial\lambda}{\partial t} = 0$. Du musst hierzu $\langle\lambda', t|\frac{\partial\hat{I}(t)}{\partial t}|\lambda, t\rangle$ auf zwei unterschiedliche Arten berechnen und die beiden Ausdrücke gleichsetzen, sowie am Ende $\lambda' = \lambda$ setzen. Die Produktregel wird dir hierbei hilfreich sein, wenn du $\frac{\partial}{\partial t}[\hat{I}(t)|\lambda, t\rangle]$ berechnest. **[9pt]**

- Zunächst berechnen wir den gewünschten Ausdruck mittels der definierenden Gleichung der Invarianten:

$$\begin{aligned}
\langle\lambda', t|\frac{\partial\hat{I}(t)}{\partial t}|\lambda, t\rangle &= -\frac{1}{i\hbar}\langle\lambda', t|[\hat{I}(t), \hat{H}(t)]|\lambda, t\rangle \\
&= -\frac{1}{i\hbar}\left(\langle\lambda', t|\hat{I}(t)\hat{H}(t)|\lambda, t\rangle - \langle\lambda', t|\hat{H}(t)\hat{I}(t)|\lambda, t\rangle\right) \\
&= -\frac{(\lambda' - \lambda)'}{i\hbar}\langle\lambda', t|\hat{H}(t)|\lambda, t\rangle
\end{aligned} \tag{7}$$

  [+3pt]

- Dann leiten wir die Eigenwertsgleichung für $\hat{I}(t)$ ab:

$$\frac{\partial\hat{I}(t)}{\partial t}|\lambda, t\rangle + \hat{I}(t)\frac{\partial}{\partial t}|\lambda, t\rangle = \frac{\partial\lambda}{\partial t}|\lambda, t\rangle + \lambda\frac{\partial}{\partial t}|\lambda, t\rangle \tag{8}$$

[+1pt] und berechnen dann den Sandwichausdruck:

$$\begin{aligned}\langle\lambda', t| \frac{\partial \hat{I}(t)}{\partial t} |\lambda, t\rangle + \langle\lambda', t| \hat{I}(t) \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, t\rangle &= \frac{\partial\lambda}{\partial t} \langle\lambda', t| |\lambda, t\rangle + \lambda \langle\lambda', t| \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, t\rangle \\ \implies \langle\lambda', t| \frac{\partial \hat{I}(t)}{\partial t} |\lambda, t\rangle &= \frac{\partial\lambda}{\partial t} \delta_{\lambda',\lambda} - (\lambda' - \lambda) \langle\lambda', t| \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, t\rangle\end{aligned} \tag{9}$$

[+3pt]

Wir setzen die beiden Ausdrücke gleich:

$$-\frac{(\lambda'-\lambda)'}{i\hbar} \langle\lambda', t| \hat{H}(t) |\lambda, t\rangle = \frac{\partial\lambda}{\partial t} \delta_{\lambda',\lambda} - (\lambda' - \lambda) \langle\lambda', t| \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, t\rangle \tag{10}$$

Für $\lambda' = \lambda$ erhalten wir

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = 0 \tag{11}$$

[+2pt]

(c) Definiere nun $|\lambda, t\rangle_\alpha = \exp[i\alpha_\lambda(t)] |\lambda, t\rangle$. Dies ist ein Eigenzustand von $\hat{I}(t)$, i.e., $\hat{I}(t) |\lambda, t\rangle_\alpha = \lambda |\lambda, t\rangle_\alpha$. Fordere nun, dass $|\lambda, t\rangle_\alpha$ eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung ist und leite den folgenden formalen Ausdruck für die Phase $\alpha_\lambda(t)$ her:

$$\alpha_\lambda(t) = \int_0^t dt' \langle\lambda, t'| \left[i\frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{\hbar}\hat{H}(t') \right] |\lambda, t'\rangle \tag{12}$$

[6pt]

Sei $|\lambda, t\rangle_\alpha = \exp[i\alpha_\lambda(t)] |\lambda, t\rangle$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung, d.h.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} |\lambda, t\rangle_\alpha \equiv \hat{H}(t) |\lambda, t\rangle_\alpha \tag{13}$$

[+1pt] Wir vereinfachen die linke Seite:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \left(\exp[i\alpha_\lambda(t)] |\lambda, t\rangle\right) &= i\hbar \left(i\frac{d\alpha_\lambda(t)}{dt} \exp[i\alpha_\lambda(t)] |\lambda, t\rangle + \exp[i\alpha_\lambda(t)] \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, t\rangle \right) \\ &= -\hbar\frac{d\alpha_\lambda(t)}{dt} \exp[i\alpha_\lambda(t)] |\lambda, t\rangle + i\hbar \exp[i\alpha_\lambda(t)] \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, t\rangle \\ &\equiv \hat{H}(t) \exp[i\alpha_\lambda(t)] |\lambda, t\rangle \end{aligned} \tag{14}$$

[+2pt] Wir berechnen wieder ein Sandwich mit $\langle\lambda', t|$ und erhalten:

$$\langle\lambda', t| \hat{H}(t) |\lambda, t\rangle = -\hbar\frac{d\alpha_\lambda(t)}{dt} \delta_{\lambda',\lambda} + i\hbar \langle\lambda', t| \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, t\rangle \tag{15}$$

[+1pt] Für $\lambda' = \lambda$ erhalten wir eine Differentialgleichung

$$\frac{d\alpha_\lambda(t)}{dt} = \langle\lambda, t| \left[i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\hbar}\hat{H}(t) \right] |\lambda, t\rangle \tag{16}$$

[+1pt] Wir erhalten somit eine formale Lösung

$$\alpha_\lambda(t) = \int_0^t dt' \, \langle \lambda, t' | \left[i\frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{\hbar}\hat{H}(t') \right] | \lambda, t' \rangle \tag{17}$$

[+1pt] Siehe arXiv:2411.12894 für weitere Details.

2 Gekoppelte Oszillatoren (20pt)

Betrachte zwei harmonische Oszillatoren a_1, a_2 mit freiem Hamiltonian

$$H^0 = \hbar\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega_2 a_2^\dagger a_2, \tag{18}$$

wobei $\omega_2 = \pi\omega_1$. Der Hilbertraum ist also $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})_1 \otimes L^2(\mathbb{R})_2$ und die einzelnen Oszillatoren wirken auf die Standardbasis $|n\rangle_i \in L^2(\mathbb{R})_i$ eines Oszillators über

$$a_i |n\rangle_i = \sqrt{n_i}\, |n-1\rangle_i, \qquad a_i^\dagger |n\rangle_i = \sqrt{n_i + 1}\, |n+1\rangle_i, \qquad i = 1, 2. \tag{19}$$

Diese Oszillatoren werden durch eine Interaktion gekoppelt, sodass der Gesamthamiltonian durch

$$H = H^0 + H^I, \qquad H^I = \lambda(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) \tag{20}$$

gegeben ist. Die Änderung der Energie eines Eigenzustandes $|\psi\rangle$ von H^0 in erster und zweiter Ordnung der Störungstheorie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Delta E_\psi^{(1)} &= \langle \psi | H^I | \psi \rangle \\ \Delta E_\psi^{(2)} &= \sum_{\psi'} \frac{|\langle \psi' | H^I | \psi \rangle|^2}{E' - E}, \end{aligned} \tag{21}$$

wobei die Summe im Term zweiter Ordnung über alle Zustände anderer Energieeigenwerte geht.

(a) Was sind die Eigenvektoren und das Spektrum des freien Hamiltonians H^0? Ist das Spektrum entartet? **[4pt]** Die Eigenvektoren sind gegeben durch $|n, b\rangle = |n\rangle_1 \otimes |b\rangle_2$ **[+1pt]** mit Eigenwert $E_{nb} = \hbar(n\omega_1 + b\omega_2)$ **[+1pt]**. Da $\omega_2 = \pi\omega_1$ ist $\omega_2 \neq k\omega_1$ für natürliche Zahlen k **[+1pt]**, wodurch das Spektrum nicht entartet ist **[+1pt]**.

(b) Berechne die Matrixelemente $\langle \psi' | H^I | \psi \rangle$ für alle Paare von Eigenvektoren ψ', ψ von H^0. **[4pt]** Wir wollen alle Matrixelemente der Interaktion berechnen, also

$$H^{I,k,l}_{n,m} \, \langle k, l | H^I | n, m \rangle = \lambda \, \langle k, l | (a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) | n, m \rangle \tag{22}$$

[+1pt] Dies ergibt durch Einsetzen der Wirkung der Erzeuger und Vernichter auf die Basiszustände

$$\begin{aligned} H^{I,k,l}_{n,m} &= \lambda\big(\sqrt{m}\, \langle k, l | a_1^\dagger | n, m-1 \rangle + \sqrt{n}\, \langle k, l | a_2^\dagger | n-1, m \rangle \big) \\ &= \lambda\big(\sqrt{m(n+1)}\, \langle k, l | n+1, m-1 \rangle + \sqrt{n(m+1)}\, \langle k, l | n-1, m+1 \rangle \big) \\ &= \lambda\big(\sqrt{m(n+1)}\delta_{k,(n+1)}\delta_{l,(m-1)} + \sqrt{n(m+1)}\delta_{k,(n-1)}\delta_{l,(m+1)}\big) \end{aligned} \tag{23}$$

[+3pt]

(c) Berechne die Änderung der Energie eines Eigenzustandes in erster Ordnung der Störungstheorie. **[3pt]** Die Energieänderung wird durch Diagonalelemente

$$\Delta E^{(1)}_{n,m} = H^{I,n,m}_{n,m} \tag{24}$$

bewirkt **[+1pt]**. Aus der letzten Aufgabe wissen wir, dass die Diagonalelemente verschwinden, da alle Indizes in den Kronecker-Deltas einen Shift um mindestens eins haben, somit

$$\Delta E^{(1)}_{n,m} = \lambda(0+0) = 0, \tag{25}$$

also verändert sich die Energie in erster Ordnung nicht. **[+2pt]**

(d) Berechne die Änderung der Energie eines Eigenzustandes in zweiter Ordnung der Störungstheorie. Für welche Zustände ist die Änderung so, dass sich die Energie vergrößert? **[6pt]** In zweiter Ordnung der Störungstheorie berechnen wir

$$\Delta E^{(2)}_{n,m} = \sum_{(k,l)\neq(n,m)} \frac{|H^{I,k,l}_{n,m}|^2}{E_{k,l} - E_{n,m}} \tag{26}$$

Wir wissen aus (b), dass nur die Paare $(k,l) = (n+1, m-1), (k,l) = (n-1, m+1)$ nichtverschwindende Eigenwerte haben **[+2pt]**, also

$$\sum_{(k,l)\neq(n,m)} \frac{|H^{I,k,l}_{n,m}|^2}{E_{k,l} - E_{n,m}} = \lambda^2\Big(\frac{(n+1)m}{E_{n+1,m-1} - E_{n,m}} + \frac{n(m+1)}{E_{n-1,m+1} - E_{n,m}}\Big) \tag{27}$$

. Einsetzen der Energien von H^0 ergibt dann

$$\Delta E^{(2)}_{n,m} = \lambda^2\Big(\frac{(n+1)m}{\hbar\omega_1 - \hbar\omega_2} + \frac{n(m+1)}{\hbar\omega_2 - \hbar\omega_1}\Big) = \frac{\lambda^2}{\hbar(\omega_2-\omega_1)}(n-m) \tag{28}$$

[+2pt] Da $\omega_2 - \omega_1 > 0$, vergrößert sich die Energie für alle Zustände mit $n > m$.**[+2pt]**

(e) Betrachte nun eine allgemeine Störung der Form $V = \lambda\big((a_1^\dagger)^k a_2^l + (a_2^\dagger)^k a_1^l\big)$. Für welche ganzen Zahlen $k, l \geq 0$ ergibt sich eine nichtverschwindende Änderung der Energie in erster Ordnung der Störungstheorie? **[3pt]** Für die erste Ordnung müssen wieder Diagonalelemente ausgerechnet werden, für die wir die Erwartungswerte

$$\Delta E^{(1)}_{n,m} = \langle n,m|(a_2^\dagger)^k a_1^l|n,m\rangle \tag{29}$$

berechnen müssen **[+1pt]**. Für jedes k,l gilt $a_1^l\,|n,m\rangle \propto |n-l,m\rangle$, weswegen die Änderung proportional zu $\langle n, n-l\rangle = \delta_{n|n-l}$ ist, was für jedes $l \neq 0$ verschwindet. **[+1 pt]**. Selbiges gilt für $a_2^\dagger$. Es gibt also nur eine nichtverschwindende Änderung für $k = l = 0$. **[+1pt]**.

3 Symmetrien im Heisenbergbild (20pt)

(a) Erkläre wie das Heisenbergbild definiert wird und bestimme die Bewegungsgleichung eines Operators im Heisenbergbild. **[5pt]**
Aus dem Erwartungswert einer Observablen $A(t)$ im Schrödingerbild folgt:

$$\langle A(t)\rangle_{|\Psi(t)\rangle} = \langle\Psi(t)|A(t)|\Psi(t)\rangle = \langle\Psi(t_0)|U^\dagger(t,t_0)A(t)U(t,t_0)|\Psi(t_0)\rangle\,. \tag{30}$$

[+1pt] Damit ist:

$$A_H(t) = U^\dagger(t,t_0)A(t)U(t,t_0). \tag{31}$$

[+1pt]. Die Bewegungsgleichung findet man durch Ableiten:

$$\frac{d}{dt}A_H = \frac{d}{dt}\Big(U^\dagger(t,t_0)A(t)U(t,t_0\Big) + \frac{\partial A_H}{\partial t} \tag{32}$$

[+1pt]. Dann ist jetzt:

$$\frac{d}{dt}A_H = -\frac{1}{i\hbar}H(t)U^\dagger(t,t_0)A(t)U(t,t_0) + \frac{1}{i\hbar}U^\dagger(t,t_0)A(t)H(t)U(t,t_0) + \frac{\partial A_H}{\partial t}. \tag{33}$$

[+1pt] Da H und $U(t,t_0)$ kommutieren, ist:

$$\frac{d}{dt}A_H = \frac{i}{\hbar}[H,A_H] + \frac{\partial A_H}{\partial t} \tag{34}$$

[+1pt]. **Anmerkungen**:

– Wenn $A(t)$ als zeitunabhängig angenommen wird, dann führt dies zu keinem Abzug.

(b) Unter welcher Bedingung ist eine Observable, die nicht explizit von der Zeit abhängt, erhalten? **[2pt]**
Nun ist:

$$\frac{d}{dt}A_H = \frac{i}{\hbar}[H,A_H]. \tag{35}$$

[+1pt]. Wenn A_H erhalten ist, dann ist $\frac{d}{dt}A_H = 0$, also:

$$[H,A_H] = 0. \tag{36}$$

[+1pt].

(c) Wir betrachten einen Hamiltonoperator der Form $H(r,\mathbf{L}^2,\mathbf{S}^2)$, wo r die Radialkomponente ist, $\mathbf{L}$ der Drehimpulsoperator und $\mathbf{S}$ der Spinoperator. Drücke die

Komponenten von $\mathbf{L}$ durch Differentialoperatoren aus und berechne $[\mathbf{L}, r]$. Unter Benutzung von:

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \tag{37}$$
$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x \tag{38}$$
$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y, \tag{39}$$

zeige, dass:

$$[\mathbf{L}^2, \mathbf{L}] = 0 \tag{40}$$

gilt (Zeige es für eine Komponente und argumentiere mit Symmetrie). Schließe daraus, dass der Drehimpuls erhalten ist. **[6pt]**

Es gilt $\mathbf{L} = -i\hbar\mathbf{x} \times \boldsymbol{\nabla}$. In Komponenten gilt:

$$L_i = -i\hbar\varepsilon_{ijk}x_j\partial_k. \tag{41}$$

[+1pt]. Dann ist:

$$[L_i, r] = -i\hbar\varepsilon_{ijk}[x_j\partial_k, r]. \tag{42}$$

Da $r = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ ist, gilt:

$$[x_j\partial_k, r] = x_j\partial_k(r\cdot) - rx_j\partial_k(\cdot). \tag{43}$$

Da $\partial_k r = \frac{x_k}{r}$, ist:

$$x_j\partial_k(r\cdot) = \frac{x_jx_k}{r} + rx_j\partial_k(\cdot). \tag{44}$$

Somit ist:

$$[L_i, r] = -i\hbar\varepsilon_{ijk}\left(\frac{x_jx_k}{r}\right) = 0, \tag{45}$$

da $\varepsilon_{ijk}\frac{x_jx_k}{r} = -\varepsilon_{ikj}\frac{x_jx_k}{r}$ ist. **[+2pt]**

Es reicht dies aufgrund der Symmetrie nur für ein L_i zu zeigen:

$$[L_i, \mathbf{L}^2] = [L_i, L_x^2 + L_y^2 + L_z^2]. \tag{46}$$

Man nehme an $i = x$, dann ist:

$$[L_x, L_y^2 + L_z^3] = [L_x, L_y]L_y + L_y[L_x, L_y] + L_z[L_x, L_z] + [L_x, L_z]L_z. \tag{47}$$

Dies vereinfacht sich zu:

$$i\hbar L_zL_y + i\hbar L_yL_z - i\hbar L_zL_y - i\hbar L_yL_z = 0. \tag{48}$$

[+2pt].

Da in H nur Terme proportional zu $\mathbf{L}^2$ auftauchen, gilt:

$$[H, \mathbf{L}] = 0. \tag{49}$$

Nach Teil (b) ist somit $\mathbf{L}$ erhalten **[+1pt]**.

(d) Die Eigenzustände von H_0 nehmen die Form $|n, l, m, s, m_s\rangle$, wobei $|l, m\rangle$ der Drehimpulszustand aus D_l ist und $|s, m_s\rangle$ den Spinzustand aus D_s beschreibt (m_s ist der Eigenwert von S_z, m der Eigenwert von L_z). Von welchen der Quantenzahlen n, l, m, s, m_s kann der Energieeigenwert $E(n, l, m, s, m_s)$ **nicht** abhängen? **[2pt]**
Da $\mathbf{L^2}$ den Eigenwert $\hbar^2 l(l+1)$ hat und $\mathbf{S^2}$ den Eigenwert $\hbar^2 s(s+1)$ hat, folgt, dass nur die Quantenzahlen n, l, s eine Rolle spielen. (m, m_s hingegen nicht)**[+2pt]**.

(e) Nun betrachte den modifizierten Operator:

$$H_1 = H_0 + \kappa \mathbf{LS}, \tag{50}$$

wo κ eine Konstante ist. Was sind die Eigenwerte von H_1 auf dem Vektorraum, der von den Zuständen $|n, l, m, s, m_s\rangle$ aufgespannt wird? Von welchen Kombinationen der Quantenzahlen können die Eigenwerte von H_1 **nicht** abhängen?**[5pt]**
Man betrachte den totalen Drehimpulsoperator $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. Nun ist:

$$\mathbf{LS} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{J^2} - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2\right). \tag{51}$$

[+2pt] Da $\mathbf{J}^2, \mathbf{L}^2, \mathbf{S}^2$ kommutierende Operatoren sind, sind die Eigenzustände von H_0 und H_1 dieselben, da somit auch:

$$[H_0, H_1] = 0 \tag{52}$$

[+1pt] folgt. Die Eigenwerte sind modifiziert:

$$E(n, l, s) + \kappa \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right). \tag{53}$$

[+1pt] Da aber j von Kombinationen von m_s und m abhängt, sind Energieeigenwerte somit von allen n, l, m, s, m_s abhängig. **[+1pt]**