Computerphysik WS 2017/2018

Prof. Dr. Petra Imhof, FU Berlin

Übungsblatt 1:
Rechnen mit begrenzter Genauigkeit
(Rundungsfehler)

25. Oktober 2017

Abgabe bis **02.11.2017** 23:55 Uhr

Hinweis: Benutzen Sie:
`numpy.log()`, `numpy.sin()`, `numpy.cos()`, `math.sqrt()`, `math.factorial()`, `numpy.arange()`, `numpy.exp()`, `matplotlib.pyplot`

1.1. Verlust der Genauigkeit (5 Punkte)

(a) (2 Punkte) Gegeben ist eine Variable x mit ihrem exakten Wert und mit einem aus Rundungen hervorgegangegen, fehlerbehaftetem Wert $\tilde{x}$, so dass $\tilde{x} \approx x$.

Wieviele signifikante Stellen haben die gerundeten Werte $\tilde{x}$?

Bestimmen Sie für folgende Werte jeweils den absoluten und relativen Fehler.

(i) $x = 15.254$, $\tilde{x} = 15.271$

(ii) $x = 0.015254$, $\tilde{x} = 0.015271$

(iii) $x = \sqrt{2}$, $\tilde{x} = 1.414$

(b) (3 Punkte) In manchen Fällen kann der Verlust der Genauigkeit dadurch gemildert werden, dass ein zu berechnender Ausdruck umgeformt wird. Einzelne Terme werden dann in einer Reihenfolge oder auch mit einer anderen Funktion evaluiert.

Finden Sie für die angegebenen Terme eine Umformung und evaluieren Sie den neuen und den ursprünglichen Ausdruck (in half precision, np.float16) für sehr kleine x, d.h. in der Nähe von Null (im Fall (ii) nicht ganz so nah): (Hinweis: Sie benötigen Trigonometrische Identitäten.)

(i) $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

(ii) $f(x) = \log(x+1)$ - $\log(x)$

(iii) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1$

Aufgabe 1.2: Konditionszahl (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \exp\left(x^2\right) \cdot \sqrt{x} \tag{1}$$

(a) (1 Punkt) Definieren Sie eine Funktion, die $f(x)$ auswertet. Eingabeparameter soll ein `numpy.array` mit x Werten sein, Ausgabeparameter ein `numpy.array` mit den Funktionswerten.

(b) (1 Punkt) Werten Sie die Funktion $f(x)$ im Intervall 0.00 bis 1.00 aus. Verwenden Sie dafür eine Schrittweite von 0.01 und plotten Sie $f(x)$.

(c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Konditionszahl $\frac{|f'(x)|\cdot|x|}{|f(x)|}$ für die Funktion $f(x)$ an den Stellen $x = 0.05, 0.10, ..., 1.00$.

(d) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Konditionszahlen für die Funktionen $g(x) = \exp\left(x^2\right)$ und $h(x) = \sqrt{x}$ wie zuvor an den Stellen $x = 0.05, 0.10, ..., 1.00$. Vergleichen und "diskutierenSSie die Ergebnisse anhand eines Plots.

Hinweis: Verwenden Sie analytisch berechnete Ableitungen.

Aufgabe 1.3: Taschenrechner Phänomen (5 Punkte)

Wer kennt es nicht: Der Unterricht in der Schule ist wieder Mal langweilig. Also tippt man eine beliebige Zahl in den Taschenrechner ein und nimmt die Wurzel von dieser. Die resultierende Zahl wird wieder gewurzelt. Dieser Vorgang wird solange wiederholt bis man bei 1 ankommt. Dabei wissen Sie, dass das Resultat von 1 verschieden sein müsste...

In dieser Aufgabe sollen Sie diesem Phänomen auf die Spur gehen. Verwendet dazu die Zahl 500000 als Ausgangswert.

(a) (1 Punkt) Plotten Sie die resultierenden Zahlen gegen die Anzahl Wiederholungen.

(b) (1 Punkt) Wie viele Durchläufe braucht man bis man bei 1 ankommt?

(c) (1 Punkt) Wie lässt sich dieses Phänomen erklären?

(d) (2 Punkte) Ist die Anzahl der Durchläufe die bei 1. und 2. für dieses Beispiel erhalten werden, für jeden Rechner gleich? Erklären Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 1.4 Reihenentwicklung (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^x \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$$

(a) (1 Punkt) Schreiben Sie eine Funktion die $f(x)$ bis zu einer beliebigen Ordnung N ausgibt. Als Eingabeparameter sind x und die Ordnung nötig.

(b) (7 Punkte) Lassen Sie sich von dieser Funktion alle Approximationen bis zu einschließlich Ordnung $N = 6$ ausgeben. Plotten Sie die jeweilige Ordnung zusammen mit $f(x)$. (Hinweis: Sie sollten am Ende 7 plots mit jeweils Achsenbeschriftung und Überschrift haben)

(c) (2 Punkte) Was beobachten Sie? Erklären Sie Ihre Beobachtung.