Computerphysik WS 2016/2017

Prof. Dr. Petra Imhof, FU Berlin

Übungsblatt 2: Nullstellensuche

28. Oktober 2016

Hinweis: Wo nötig, können Sie für die Berechnung der Ableitung einer Funktion scipy.misc.derivative() verwenden oder die Ableitungsfunktion analytisch bestimmen.

Aufgabe 2.1: Bisektionsverfahren (5 Punkte)

An einer Feder schwingt eine Kugel der Schwingungsgleichung

$$s(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \tag{1}$$

folgend reibungsfrei auf und ab.

a) (1 Punkt) Definieren Sie die Schwingungsfunktion der Kugel, für eine Frequenz von $1Hz$, eine Amplitude von $1m$ und einem Phasenwinkel von $0rad$.

b) (2 Punkte) Schreiben Sie eine Funktion, die die Nullstellen einer Funktion mit dem Bisektionsverfahren bestimmt.

   Hinweis: Als Argumente sollten die Funktion (z.B. $s(t)$) und die dem Bisektionsverfahren entsprechenden Parameter übergeben werden. Die Funktion soll jeweils die bestimmte Nullstelle und die Anzahl der benötigten Iterationsschritte zurückgeben.

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie im Intervall $t = 1 - 4s$ den Zeitpunkt, in dem die Kugel nicht oder maximal ($s'(t) = 0$) ausgelenkt ist. Gehen Sie davon aus, dass die Positionsbestimmung der Kugel nur mit einer Genauigkeit von $\Delta s = 0,01m$ möglich ist.

d) (1 Punkt) Ermitteln Sie für $s(t)$ wie viele Iterationsschritte n für Genauigkeiten von

$$\Delta s = \left\{2^{-1}, 2^{-2}, ..., 2^{-20}\right\} \tag{2}$$

   benötigt werden. Plotten Sie $n(\Delta s)$ doppeltlogarithmisch.

Aufgabe 2.2: Newton-Verfahren (5 Punkte)

(2 Punkte) Implementieren Sie das Newton Verfahren in ein python Programm. Nutzen Sie dieses Programm, um damit die Nullstellen der Funktion $f(x) = sin(x)$ im Intervall [1.0,4.0] zu finden.

a) (2 Punkte) Wählen Sie 10 gleichmässig über das Intervall verteilte Startwerte x_0, und bestimmen Sie für diese Startwerte mit Hilfe Ihres Newton-Verfahrens die Nullstellen mit den Toleranzen 10^{-1}; 10^{-2} ; 10^{-3}; $\ldots$; 10^{-10}

b) (1 Punkt) Diskutieren Sie, welchen Effekt die Toleranz auf die erhaltenen Nullstellen hat.

Aufgabe 2.3: Fixpunktverfahren (5 Punkte)

(2 Punkte) Schreiben Sie ein python Programm, dass eine Fixpunktiteration $x_{n+1} = \phi(x_n)$ implementiert. Lassen Sie sich in jedem Iterationsschritt den aktuellen Punkt x_n sowie den Betrag der aktuellen Steigung $\phi\prime(x_n)$ ausgeben.

Nutzen Sie dieses Programm, um die Nullstelle der Funktion $f(x) = x3 - sinx$ zu finden. Verwenden Sie für die Fixpunktiteration folgende Funktionen:

1. $\phi_1(x) = (arcsin(x^3))$
2. $\phi_2(x) = (sinx)^{1/3}$.

a) (1 Punkt) Plotten Sie die Funktionen $f(x)$, $\phi_1(x)$ und $\phi_2(x)$ in ein Diagramm.

b) (1 Punkt) Rechnen Sie für die Startpunkte

   i.) $x_0 = 0.001$

   ii.) $x_0 = 1.0$

   iii.) $x_0 = -0.5$

   iv.) $x_0 = 0.5$

   beide Fixpunktiterationen (für maximal 20 Iterationen).

c) (1 Punkt) Was beobachten Sie für die beiden Fixpunktiterationen hinsichtlich der Startwerte und des Konvergenzverhaltens und wie erklären Sie das?

Aufgabe 2.4: Nullstellenberechnung Vergleich der Verfahren (5 Punkte)

Benutzen Sie die von Ihnen in den Aufgaben 2.1-2.3 implementierten Verfahren Bisektionsverfahren, Fixpunktverfahren, Newtonverfahren zur Bestimmung der Nullstellen einer Funktion $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Hnweis: Zur Kontrolle dürfen Sie in dieser Aufgabe mit entsprechenden Implementierungen von scipy.optimize arbeiten.*

Als Argumente sollten die Funktionen f und die den Verfahren entsprechenden Parameter übergeben werden. Als Rückgabewerte sollen Sie jeweils die bestimmte Nullstelle sowie die benötigte Anzahl an Iterationsschritten erhalten.

a) (2 Punkte) Ermitteln Sie mit den drei Verfahren die Nullstelle folgender Funktionen im Intervall $[-1; 1]$ mit der Genauigkeit $\Delta x = 0.01$:

$$f(x) = \sin(x + 0.5 \cdot \pi)^2 - x + 0.2 \quad (3)$$
$$g(x) = (x - 0.1)^2 - 0.75 \cdot x - 0.2 \quad (4)$$

   Verwenden Sie als Startwert für Fixpunkt- und Newtonverfahren $x_0 = 0$ und für die Bisektion die Intervallgrenzen.

b) (2 Punkte) Wieviele Interationsschritte n benötigen Sie hier um Genauigkeiten $\Delta x = [2^{-1}, 2^{-2}, ..., 2^{-20}]$ zu erreichen?

   Plotten Sie $n(\Delta)$ für alle Verfahren in je einem doppellogarithmischen Graphen für $f(x)$ und $g(x)$.

c) (1 Punkte) Erklären Sie warum sich das Fixpunktverfahren für $g(x)$ deutlich besser verhält als für $f(x)$.