Computerphysik WS 2016/2017

Prof. Dr. Petra Imhof, FU Berlin

Übungsblatt 5: Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen

17. November 2016

Aufgabe 5.1: QR-Zerlegung und Berechnung der Eigenwerte/Eigenvektoren (10 Punkte)

a) (4 Punkte) Implementieren Sie einen QR-Zerlegungsalgorithmus, der als Eingabe eine quadratische Matrix $\mathbf{M}$ akzeptiert und als Rückgabewert die Matrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ liefert mittels Householder-Spiegelung.

b) (3 Punkte) Implementieren Sie außerdem eine Methode um mittels QR-Zerlegung iterativ die Eigenwerte einer quadratischen Matrix zu bestimmen. Betrachten Sie Matrixelemente von <=0.000005 als genügend nahe an Null.

c) (2 Punkte) Benutzen Sie die Matrizen von Übungsblatt 3:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9.0 & 3.0 & 1.0 & 4.0 \\ 3.0 & 5.0 & 2.0 & 4.0 \\ 1.0 & 2.0 & 5.0 & 6.0 \\ 4.0 & 4.0 & 6.0 & 10.0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1.0 & 3.0 & 1.0 & 4.0 \\ 3.0 & 2.0 & 2.0 & 5.0 \\ 1.0 & 2.0 & 1.0 & 6.0 \\ 4.0 & 5.0 & 6.0 & 2.0 \end{pmatrix}.$$

und berechnen Sie mit Ihrem Algorithmus die Eigenwerte beider Matrizen. Ihre Ergebnisse können Sie mittels `np.linalg.eig` überprüfen

d) (1 Punkt) Anschließend nutzen Sie entweder Ihren Gauss-Algorithmus oder Numpy `np.linalg.solve` um das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \cdot \mathbf{x}_i = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Hierbei ist $\boldsymbol{x}_i$ der zum Eigenwert λ_i zugehörige Eigenvektor (Tipp: Benutzen Sie als Lösungsvektor nicht exakt 0, sondern nahe 0 (0.000001), andernfalls wird die Lösung immer der Nullvektor bleiben.).

Aufgabe 5.2: Potenzmethode zur Berechnung des dominanten Eigenwertes/Eigenvektors (10 Punkte)

a) (4 Punkte) Implementieren Sie einen Algorithmus, der nach der Potenzmethode (Vekoriteration) den dominanten Eigenwert und zugehörigen Eigenvektor einer Matrix bestimmt. Als Eingabe soll eine quadratische Matrix $\mathbf{M}$ akzeptiert werden. Rückgabewerte sollen Eigenwert, Eigenvektor und die Anzahl benötigter Iterationen sein.

b) (4 Punkte) Benutzen Sie wieder die Matrizen **A** und **B** und berechnen Sie mit Ihrem Algorithmus die jeweils betragsmäß größten und kleinsten Eigenwerte beider Matrizen, sowie die zugehörigen Eigenvektoren. Lassen Sie maximal 100 Iterationen zu und wählen Sie einen Unterschied von 0.0001 im Eigenwert als Konvergenzkriterium. *Zur Berechnung einer Inversen Matrix verwenden Sie* `np.linalg.inv`.

c) (2 Punkte) Für welche Matrix/welche Eigenwerte werden am wenigsten Iterationen benötigt? Wie erklären Sie dies?