Freie Universität Berlin – Fachbereich Physik

VL: Mi 14-16 Uhr Prof. Dr. Kathy Lüdge
UE: Mi 16-18 Uhr (2 wöchig)

5. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik

Abgabe: Mi 14.1.15 nach der Vorlesung. Die Abgabe erfolgt in **2er Gruppen**. Bitte den Source-Code mit ausdrucken.

Aufgabe 9 (10 Punkte): *Euler-Methode für Delay-Differentialgleichungen*

In dieser Aufgabe soll die in der Vorlesung behandelte Delay-Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \quad \lambda\, x + \omega\, y - K\,[x(t) - x(t-\tau)], \\ \dot{y} &= -\omega\, x + \lambda\, y - K\,[y(t) - y(t-\tau)], \end{aligned}$$

numerisch gelöst werden. Diskutieren Sie ausserdem, welche Schwierigkeiten es geben könnte ein Mehrschrittverfahren wie z.B. Runge Kutta anzuwenden.

1. Stellen Sie die charakteristische Gleichung auf und zeigen Sie, dass $K \geq \lambda/2$ eine notwendige Bedingung für die Stabilisierung des Fixpunktes ist.
2. Integrieren Sie das System mit $\lambda = 0.5$ und $\omega = \pi$ numerisch und plotten Sie die Trajektorien für $K = 0$, $K = 0.2$, $K = 0.25$ und $K = 0.3$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Hinweise zur Numerik:

- Das Euler-Verfahren für eine Delay-Differentialgleichung

  $$\dot{X} = f[X(t),\, X(t-\tau)]$$

  ist gegeben durch

  $$X_{n+1} = X_n + dt \cdot f[X_n,\, X_{n-\Delta}],$$

  wobei $\Delta = \tau/dt$.
- Um den Delay-Term auswerten zu können muss die Lösung zwischengespeichert werden. Verwenden Sie für die x und y Variable jeweils ein history-Array der Länge `delta=int(tau/dt)`. Initialisieren Sie diese Arrays mit Nullen und schreiben Sie in die Arrays dann zyklisch die neuen Werte (d.h.: Wenn Sie am Ende angekommen sind fangen Sie von vorne an).
  Tipp: Verwenden Sie die Modulo-Operation %.
- Lassen Sie das System von $t = 0$ bis $t = \tau$ ohne Kontrolle ($K = 0$) laufen, um die history-Arrays zu initialisieren, und schalten Sie dann die Kontrolle ein.
- Speichern Sie die berechneten x und y Werte in entsprechenden Ausgabearrays und plotten Sie dann die Phasenportraits.

Bitte Rückseite beachten!$\longrightarrow$

Aufgabe 10 (10 Punkte): *Logistisches Populationsmodell mit Delay*
Betrachten Sie das folgende Modell für die Anzahl N an Individuen in einer Population

$$\dot{N}(t) = rN(t)[1 - N(t-\tau)/K],$$

wobei r die Wachstumsrate und K ein Maß für die Tragfähigkeit der Umwelt ist.

1. Finden Sie die Transformation, die das Modell in die dimensionslose Gleichung

   $$x'(s) = x(s)[1 - x(s-a)]$$

   überführt. Betrachten Sie im folgenden nur noch die dimensionslose Gleichung.

2. Die Fixpunkte liegen offensichtlich bei $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$. Zeigen Sie, dass x_0 stets instabil ist und x_1 für $a = 0$ stabil ist.

3. Finden Sie den Wert $a > 0$, bei dem x_1 die Stabilität in einer Hopf-Bifurkation verliert.