VL Mi 14-16 Uhr : Prof. Dr. Kathy Lüdge
UE Mi 16-18 Uhr (2wöchig)

1. Übungsblatt zur Nchtlinearen Dynamik

Abgabe: Mi 29.10. 14:15 in der VL. Die Abgabe erfolgt in **2er Gruppen**.

Aufgabe 1 (10 Punkte): *Maxwell-Bloch-Gleichungen*
Die Maxwell-Bloch-Gleichungen sind (dimensionslose) Ratengleichungen und beschreiben die Dynamik eines Lasers

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \kappa(P - E),\\ \dot{P} &= \gamma_1(E\,D - P),\\ \dot{D} &= \gamma_2(\lambda + 1 - D - E\,P).\end{aligned}$$

Hierbei ist E das elektrische Feld der Lasermode, P die mittlere Polarisation im Medium und D die Besetzungsinversion. Der Parameter $\kappa > 0$ ist die Photon-Verlustrate und $\gamma_1 > 0$ und $\gamma_2 > 0$ sind die Zerfallsraten der Polarisation bzw. der Inversion. Der Parameter λ stellt die Pumprate abzüglich des Schwellwerts dar und kann positiv, null oder negativ sein.
Diese Gleichungen sind äquivalent zu den Lorenz-Gleichungen und zeigen daher kompliziertes dynamisches Verhalten und insbesondere auch Chaos.

1. Finden Sie die Fixpunkte der Gleichungen und charakterisieren Sie diese (stabil/instabil, Focus/Sattel/Knoten).

2. Für viele Laser gibt es eine Zeitskalentrennung $\gamma_1, \gamma_2 \gg \kappa$. Damit lassen sich dann P und D adiabatisch wie folgt eliminieren. Nehmen Sie $\dot{P} \approx 0$ und $\dot{D} \approx 0$ an. Leiten Sie damit eine einzelne Differentialgleichung erster Ordnung für E her.

3. Finden Sie für die vereinfachte eindimensionale Gleichung die Fixpunkte E^* und deren Stabilität. Zeichnen Sie ein Bifurkationsdiagramm mit E^* in Abhängigkeit von λ.

Aufgabe 2 (10 Punkte): *Van der Pol Oszillator*
Van der Pol untersuchte in den 30er Jahren einen harmonischen Oszillator mit einem nichtlinearen Dämpfungsterm

$$\ddot{x} + \kappa(x^2 - a)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (\kappa \geq 0).$$

Wenn $a > 0$ ist, verhält sich dieser für große Amplituden wie eine Reibung, wechselt aber für kleine Amplituden das Vorzeichen und führt so zu Schwingungen mit endlicher Amplitude.

1. Schreiben Sie die Gleichung als System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung mit $y = \dot{x}$ und finden Sie die Fixpunkte und deren Stabilität.

2. Lösen Sie die Gleichungen numerisch für $\kappa = 1$, $\omega_0 = 1$ und 1000 verschiedenen a Werten aus $[-1, 1]$. Lassen Sie in jeder Simulation eine transiente Zeit verstreichen (ca. 100 Zeiteinheiten) und tragen Sie dann Maxima und Minima von x über den a Werten auf, um so ein Bifurkationsdiagramm zu erhalten.
   Plotten Sie ausserdem das Phasen-Portrait in der (x, y)-Ebene für $a = 0.1$, $a = 1$, $a = 2$. Erläutern Sie das Verhalten des Oszillators, wenn a verändert wird.