VL: Mi 14-16 Uhr Prof. Dr. Kathy Lüdge
UE: Mi 16-18 Uhr (2 wöchig)

2. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik

Abgabe: Mi 19.11.14 in der VL. Die Abgabe erfolgt in **2er** Gruppen.

Aufgabe 3 (10 Punkte): *Homokliner Orbit im Lorenz-System*

Homokline Orbits verbinden Fixpunkte mit sich selbst und lassen sich meist nur numerisch finden. In dieser Aufgabe soll solch eine homokline Verbindung für einen Fixpunkt des Lorenz-Systems gefunden werden.
Betrachten Sie das Lorenz-System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - \beta z, \end{aligned}$$

mit $\sigma = 10$ und $\beta = 8/3$.
Wir untersuchen $1 < \rho < 24$. In diesem Parameterbereich gibt es drei Fixpunkte, die wir mit C_0, C_+ und C_- bezeichnen:

$$\begin{aligned} C_0 &:= (0,\, 0,\, 0), \\ C_\pm &:= (\pm\xi,\, \pm\xi,\, \rho - 1) \quad \text{mit} \quad \xi = \sqrt{\beta(\rho-1)}. \end{aligned}$$

Die Fixpunkte $C_\pm$ sind stabile Foki.

1. Zeigen Sie, dass C_0 und $C_\pm$ tatsächlich Fixpunkte sind. Zeigen Sie weiterhin, dass C_0 für $\rho > 1$ ein Sattel mit einer instabilen Richtung und zwei stabilen Richtungen ist. Berechnen Sie den Eigenvektor $\mathbf{v}$ zur instabilen Richtung von C_0 (dies ist der Tangentialvektor an die instabile Mannigfaltigkeit).

Im folgenden soll ein homokliner Orbit von C_0 gefunden werden. Dieser Orbit existiert nur für einen ganz bestimmten Wert $\rho = \rho_*$.

2. Starten Sie die Simulation (für einen Wert von ρ) im Fixpunkt C_0 mit einer kleinen Auslenkung in Richtung von $\mathbf{v}$. Für $\rho < \rho_*$ landet man in einem der beiden Fixpunkt $C_\pm$ und für $\rho > \rho_*$ in dem Anderen (welcher Fixpunkt das genau ist, hängt davon ab, in welche Richtung man $\mathbf{v}$ gewählt hat).

   Bestimmen Sie ρ_* auf mindestens vier Nachkommastellen genau, indem Sie die Phasenportraits in der $(x,\, y)$-Ebene untersuchen und sich immer näher an ρ_* herantasten (*Tipp:* Intervallschachtelung). Die Simulationen sollten bis ca. $t = 100$ laufen und müssen eine relativ hohe Genauigkeit haben (kleine Schrittweiten).

   Plotten Sie das Phasenportrait des homoklinen Orbits (simulieren Sie dazu nur bis ca. $t = 5$).

   Bonus: Automatisieren Sie die Suche nach ρ_* mit einer Funktion, die entscheidet, ob man in C_+ oder C_- gelandet ist.

2. Übung

Aufgabe 4 (10 Punkte): *SNIPER*

In der VL wurde ein einfaches Model einer SNIPER-Bifurkation (**s**addle-**n**ode **i**nfinite **per**iod) diskutiert. In Polarkoordinaten sind die dynamischen Gleichungen gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1-r^2), \\ \dot{\phi} &= b - r\cos\phi. \end{aligned}$$

Im folgenden soll nur die Dynamik von ϕ auf dem Kreis mit $r = 1$ untersucht werden (das geht, weil der Kreis eine invariante Mannigfaltigkeit des Systems ist).

1. Untersuchen Sie die Fixpunkte des reduzierten Systems in Abhängigkeit vom Parameter b (Existenz, Position, Stabilität)

2. Finden Sie die Lösungen $\phi(t)$ durch Trennung der Variablen für $b < 1$ und $b > 1$. Benutzen Sie hierfür

$$\int \frac{d\phi}{b-\cos\phi} = \frac{2}{\sqrt{b^2-1}} \arctan\left[\frac{(b+1)\tan\frac{\phi}{2}}{\sqrt{b^2-1}}\right] \qquad \text{für} \quad b > 1,$$
$$\int \frac{d\phi}{b-\cos\phi} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \log\left[\frac{(1+b)\tan\frac{\phi}{2} - \sqrt{1-b^2}}{(1+b)\tan\frac{\phi}{2} + \sqrt{1-b^2}}\right] \qquad \text{für} \quad b < 1.$$

3. Plotten Sie für die beiden Fälle $b > 1$ und $b < 1$ die Zeitserien für $x(t) = \cos\phi(t)$ mit geeigneten Anfangsbedingungen.