Blatt 2

1a

$$x^2+px+q=0$$

quadratische Ergänzung: $(x+\frac{1}{2}p)^2-\frac{1}{4}p^2+q=0$

$$\Leftrightarrow \quad (x+\tfrac{1}{2}p)^2=\tfrac{1}{4}p^2-q$$

$$\Leftrightarrow \quad x+\tfrac{1}{2}p=\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}$$

1b

$$ax^2+bx+c=0$$

Wenn $a\neq 0$: $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

aus 1a: $x=-\dfrac{b}{2a}\pm\sqrt{\dfrac{b^2}{4a^2}-\dfrac{c}{a}}$

oder $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

wenn $a=0$: $x=-\dfrac{c}{b}$

1c $\quad x(x-m)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$ oder $x=m$

1d

$$x^4-3x^2-1=0$$

ist eine quadratische Gleichung für $y=x^2$:

$y^2-3y-1=0$. Lösung: $y=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{13}{4}}$

$\Rightarrow \quad x=\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}}$ oder $x=-\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}}$

oder $x=\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}}$ oder $x=-\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}}$

(2a) $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$ hat die Lösung $x = 2$

$\Rightarrow$ $x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ enthält den Faktor $(x-2)$

Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
x-2 \,/\, x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \,\backslash\, x^2 - 4x + 1 \\
\quad\quad\;\; \underline{x^3 - 2x^2} \; - \\
\quad\quad\quad\quad -4x^2 \\
\quad\quad\quad\; \underline{-4x^2 + 8x} \; - \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad x \\
\quad\quad\quad\quad\quad \underline{x - 2} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = (x-2)(x^2 - 4x + 1)$

Die beiden anderen Lösungen sind Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Sie sind $x = 2 \pm \sqrt{3}$

(2b) $2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x$ ist durch $x(x-1) = x^2 - x$ teilbar

Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
x^2 - x \,/\, 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x \,\backslash\, 2x^2 - 3x - 1 \\
\quad\quad\quad \underline{2x^4 - 2x^3} \; - \\
\quad\quad\quad\quad -3x^3 + 2x^2 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{-3x^3 + 3x^2} \; - \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad -x^2 + x
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ $2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x = x(x-1)(2x^2 - 3x - 1)$

Die anderen beiden Lösungen sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $2x^2 - 3x - 1 = 0$

Sie sind $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$

(2c)

$$x^2+1 \,/\, x^2-2x+3 \quad \backslash\; 1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}$$

$$\underline{x^2 \qquad +1} \; -$$

$$-2x+2$$

$$\underline{-2x \qquad -\frac{2}{x}} \; -$$

$$+2+\frac{2}{x}$$

$$\underline{+2 \qquad +\frac{2}{x^2}} \; -$$

$$\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$$

$$\dots$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2-2x+3}{x^2+1} = 1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}$$ plus Terme des Typs $1/x^n$ mit $n>2$

$$x^2+2 \,/\, x^3-3x^2+4x+1 \quad \backslash\; x-3+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}$$

$$\underline{x^3 \qquad +2x} \; -$$

$$-3x^2+2x+1$$

$$\underline{-3x^2 \qquad -6} \; -$$

$$2x+7$$

$$\underline{2x \qquad +\frac{4}{x}} \; -$$

$$7-\frac{4}{x}$$

$$\underline{7 \qquad +\frac{14}{x^2}} \; -$$

$$-\frac{4}{x} + -\frac{14}{x^2}$$

$$\dots$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^3-3x^2+4x+1}{x^2+2} = x-3+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Terme des Typs $1/x^n$ mit $n \geq 3$

③ $$\sum_{n=0}^{N} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^N$$

$$q\left(\sum_{n=0}^{N} q^n\right) = q + q^2 + \dots + q^N + q^{N+1}$$

Die Terme $q, q^2, \dots, q^N$ fallen weg, wenn man diese Beide Summen von einander abzieht:

$$(1-q)\left(\sum_{n=0}^{N} q^n\right) = \sum_{n=0}^{N} q^n - q\left(\sum_{n=0}^{N} q^n\right)$$

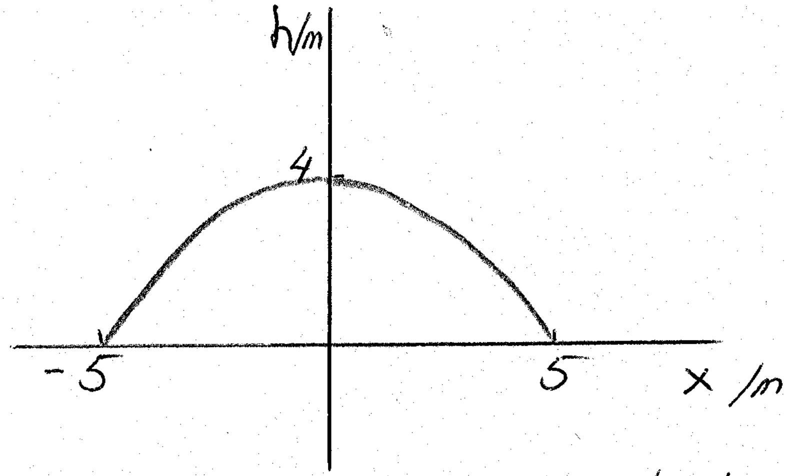
$$= 1 - q^{N+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

Wenn $|q| < 1$ ist es möglich, den Grenzübergang $N \to \infty$ zu bilden: $\lim_{N\to\infty} q^{N+1} = 0$ für $|q| < 1$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1$$

(4) $(x \text{ in } m)$
$(h \text{ in } m)$



$h(x)$ ist eine quadratische Funktion mit den Eigenschaften:

$$h(-5) = 0$$
$$h(5) = 0$$
$$h(0) = 4$$

Aus den ersten zwei Eigenschaften folgt, daß

$$h(x) = a(x-5)(x+5)$$

mit a eine Konstante.

Dann: $h(0) = -25a = 4 \Rightarrow a = -\frac{4}{25}$

$$\Rightarrow h(x) = -\frac{4}{25}(x-5)(x+5)$$
$$= -\frac{4}{25}x^2 + 4$$

(5a)

- $\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$
$= 2\sin\alpha\cos\alpha$

- $\cos(\alpha\pm\beta) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - (\alpha\pm\beta)\right)$
$= \sin\left(\left(\frac{1}{2}\pi-\alpha\right)\mp\beta\right)$
$= \sin\left(\frac{1}{2}\pi-\alpha\right)\cos\beta \mp \cos\left(\frac{1}{2}\pi-\alpha\right)\sin\beta$
$= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\overset{\alpha}{\cancel{\beta}} - \sin\alpha\sin\alpha$
$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

(5b) Wir können das 2. Ergebnis von 5a auch so schreiben (mit $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$):

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1)$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$

Ersetze nun $\alpha \to \frac{\alpha}{2}$: $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

Ebenso: $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(-\cos 2\alpha + 1)$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

Ersetze $\alpha \to \frac{\alpha}{2}$: $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

(5c) Aus

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad -$$

folgt $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

Ebenso

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad +$$

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$$

(5d)

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$$
$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$
$$= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$
$$= -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

Teile Zähler und Nenner durch $\cos\alpha\cos\beta$:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cancel{\cos}\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

5e

$$\frac{\cos\alpha\,(1-\tan^2\alpha)}{\tan\alpha\,(\cot\alpha-1)} = \frac{\cos\alpha\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-1\right)}$$

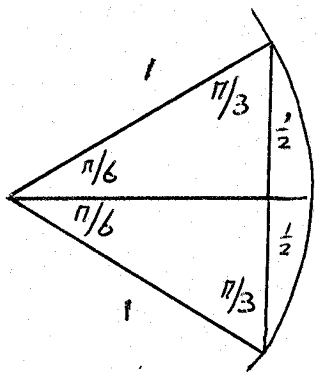
$$= \frac{\cos\alpha\left(\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

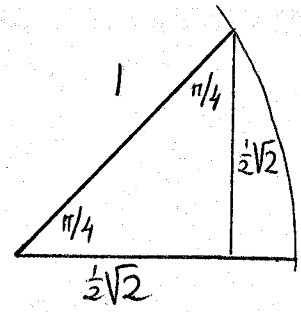
$$= \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$$

$$= \frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}$$

$$= \cos\alpha+\sin\alpha.$$

6a





$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$= \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

6b

Aus $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ und $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ folgt, daß

$$\sin\frac{\cancel{\alpha}\pi}{12} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\pi/6}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{1}{\cancel{4}\,2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}}$$

Da $0 < \sin\frac{\pi}{12} < 1$ kann nur + möglich sein

$$\Longrightarrow \sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}}$$

ggf. weiter vereinfachen:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3} = \cancel{\frac{4-2}{\ldots}} = \frac{1}{8}(1-\sqrt{3})^2 \Longrightarrow \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

6c

Mithilfe von $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

findet man

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ Setze $\alpha = \frac{\pi}{8}$

$\Rightarrow \tan\frac{\pi}{4} = \dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$ Setze $\tan\frac{\pi}{4} = 1$

$\Rightarrow 1 - \tan^2\frac{\pi}{8} = 2\tan\frac{\pi}{8}$

$\Leftrightarrow 0 = \tan^2\frac{\pi}{8} + 2\tan\frac{\pi}{8} - 1$

$\Leftrightarrow \tan\frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$

(Die Lösung $-1-\sqrt{2}$ trifft nicht zu weil $\tan\frac{\pi}{8} > 0$.)

(6d)* Wir berechnen zuerst $\sin\frac{\pi}{5}$.

Hierzu benötigen wir eine Relation zwischen $\sin 5\alpha$ und $\sin\alpha$:

$$\sin 5\alpha = \sin(2\alpha+3\alpha)$$
$$= \sin 2\alpha\cos 3\alpha + \cos 2\alpha \sin 3\alpha$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$$
$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha$$

$\Longrightarrow$

$$\sin 5\alpha = \sin 2\alpha(\cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha)$$
$$+ \cos 2\alpha(\sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha)$$
$$= 2\sin\alpha\cos\alpha((1-2\sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha)$$
$$+ (1-2\sin^2\alpha)(2\sin\alpha\cos^2\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha)$$
$$= 2\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)(1-\sin^2\alpha) - 4\sin^3\alpha(1-\sin^2\alpha)$$
$$+2(1-2\sin^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)\sin\alpha + (1-2\sin^2\alpha)^2\sin\alpha$$
$$= 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha$$
$$= \sin\alpha(16\sin^4\alpha - 20\sin^2\alpha + 5)$$

Setze nun $\alpha = \frac{\pi}{5}$, $y = \sin\frac{\pi}{5}$:

$$\sin 5\alpha = \sin\pi = 0 = y(16y^4 - 20y^2 + 5)$$

Da $\sin\frac{\pi}{5} > 0$: $y \neq 0 \Rightarrow$

$$16y^4 - 20y^2 + 5 = 0$$

$$\Longrightarrow\quad y^2 = \frac{20 \pm \sqrt{400-320}}{32} = \frac{5}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{5}$$

Wir wissen $0 < \sin^2\frac{\pi}{5} < \frac{1}{2}$, weil $\sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$,

und $\sin^2\frac{\pi}{5} < \sin^2\frac{\pi}{4}$

deshalb kann die Lösung $y^2 = \frac{5}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{5}$ nicht zutreffen

$$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{5}}$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\pi}{5}} = \sqrt{\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\frac{\pi}{5} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{5}}}$$

$$= \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}}$$

Dies kann ggf. noch weiter vereinfacht werden:

$$\frac{5 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{(5 - \sqrt{5})(-\sqrt{5} + 3)}{(\sqrt{5} + 3)(-\sqrt{5} + 3)} = \frac{-8\sqrt{5} + 20}{4} = 5 - 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

Aufgabe 8

In dieser Aufgabe geht es um Grundlagen der Kombinatorik.

(a) 1. In einer Urne liegen N unterscheidbare Kugeln. Sie ziehen nacheinander k Kugeln ohne Zurücklegen. Wie viele unterschiedliche Ergebnisse ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es?

Zuerst berechnen wir die Zahl der Ergebnisse mit Berücksichtigung der Reihenfolge. Beim 1. Zug gibt es N Möglichkeiten, beim 2. Zug $N-1$, usw., bis zum k. Zug, wofür es $N-k+1$ Möglichkeiten gibt. Insgesamt gibt es daher, mit Berücksichtigung der Reihenfolge, $N(N-1)\cdots(N-k+1) = N!/(N-k)!$ Möglichkeiten.

Nun werden Ergebnisse, die isch nur durch eine andere Reihenfolge der gezogenen Kugeln unterscheiden, als äquivalent betrachtet. Bei k gezogenen Kugeln gibt es $k!$ mögliche Reihenfolgen. Daraus folgt, dass die Zahl der Ergebnisse ohne Berücksichtigung der Reihenfolge $N!/((N-k)!k!)$ ist.

2. Die Wahrscheinlichkeit, beim Wurf einer Münze als Ergebis "Kopf" zu erhalten, sei p. Sie werfen die Münze N mal. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dabei insgesamt k mal Kopf zu erhalten? Hilft Ihnen dabei der erste Aufgabenteil?

Wenn man N mal eine Münze wirft, kann es mehrere Möglichkeiten geben, dabei k mal Kopf zu erhalten. Zum Beispiel, wenn man zwei mal eine Münze wirft, gibt es zwei Mögichkeiten genau ein mal Kopf zu erhalten: Entweder bei der ersten Wurf, oder bei der zweiten. Wir berechnen nun zuerst die Zahl der Möglichkeiten, dass bei N Würfen genau k mal Kopf erhalten wird, und dann die Wahrscheinlichkeit, dass so eine Möglichkeit auftritt.

Die Zahl der Möglichkeiten, bei N Würfe genau k mal Kopf zu erhalten ist die gleiche Zahl, die schon in Teil 1 ausgerechnet wurde: $N!/((N-k)!k!)$. Jede Möglichkeit hat die Wahrscheinlichkeit $p^k(1-p)^{N-k}$, da $N-k$ der Würfe ja Zahl geben müssen, und die Wahrscheinlichkeit, dass man Zahl erhält $1p$ ist. Insgesamt finden wir also, dass die Wahrscheinlichkeit $P(k)$ insgesamt k mal Kopf zu erhalten durch

$$P(k) = \frac{N!}{(N-k)!k!} p^k (1-p)^{N-k}$$

gegeben wird.

3. Sie kennen den Binomialkoeffizienten $\binom{N}{k}$ aus der Vorlesung. Interpretieren Sie anschaulich die beiden Relationen

$$\binom{N}{k} = \binom{N}{N-k}, \qquad \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = 1 \quad \text{für } 0 < p < 1.$$

Nach Teil 1 ist $\binom{N}{k}$ die Zahl der unterschiedlichen Ergebnisse (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge), wenn man k Kugeln aus N unterscheidbaren Kugeln zieht. Dadurch, dass man k Kugeln zieht, legt man auch die $N-k$ übrig gebliebenen Kugeln genau fest. Daher ist die Zahl der unterschiedlichen Ergebnisse für die $N-k$ übrig gebliebenen Kugeln auch $\binom{N}{k}$. Nun hätte man statt zuerst k Kugeln zu ziehen und dann die $N-k$ übrig gebliebenen Kugeln zu nehmen, auch direkt $N-k$ Kugeln ziehen können. Die Zahl der unterschiedlichen Ergebnisse ist dann $\binom{N}{N-k}$. Daher muss gelten, dass

$$\binom{N}{k} = \binom{N}{N-k}.$$

Für die zweite Identität merken wir auf, dass die Summer aller Wahrscheinlichkeiten immer 1 ist. Deshalb

$$1 = \sum_{k=0}^{N} P(k) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}.$$

(b) In einer Urne liegen N Kugeln, k weiße und $N-k$ schwarze. Sie entnehmen $l \leq k$ Kugeln ohne Zurücklegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß darunter genau $m \leq l$ weiße Kugeln sind?

Wären die Kugeln unterscheidbar, dann gäbe es $\binom{N}{l}$ Möglichkeiten, l Kugeln aus N zu ziehen. Es sind aber nur zwei Gruppen unterscheidbar, schwarz und weiss. Es gibt $\binom{k}{m}$ Möglichkeiten, m weisse aus der Gesamtheit der k weissen zu ziehen. Als Resultat erhalten wir automatisch auch $l-m$ schwarze Kugeln. Diese können auf $\binom{N-k}{l-m}$ Weisen aus den $N-k$ schwarzen gezogen werden. Das Ergebnis ist deshalb

$$P = \frac{\binom{k}{m}\binom{N-k}{l-m}}{\binom{N}{l}}.$$

Aufgabe 9*

Berechnen Sie

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)}$,

Lösung: Mithilfe der Identität

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

schreibt man die Summe als

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

(b) $\sum_{n=1}^{m} n,$

Lösung: Es gibt viele Möglichkeiten, diese Summe zu berechnen. Hier zeigen wir zwei Möglichkeiten. Der erste Lösungweg fängt mit dem Ergebnis von Aufgabe 3 an,

$$\sum_{n=1}^{m} q^n = -1 + \sum_{n=0}^{m} q^n = -1 + \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}.$$

Nun differentieren wir nach q und finden

$$\sum_{n=1}^{m} n q^{n-1} = \frac{1 - q^{m+1}}{(1 - q)^2} - (1 + m)\frac{q^m}{1 - q} = \frac{1 - q^m - m q^m + m q^{1+m}}{(1 - q)^2}.$$

Wenn wir nun $q \to 1$ setzen, so finden wir die gefragte Summe. Um den Grenzwert $q \to 1$ auszurechnen brauchen wir die l'Hôpitalsche Regel:

$$\begin{aligned}
\lim_{q \to 1} \frac{1 - q^m - m q^m + m q^{1+m}}{(1 - q)^2} &= \lim_{q \to 1} \frac{-m q^{m-1} - m^2 q^{m-1} + m(m+1) q^m}{-2(1 - q)} \\
&= \lim_{q \to 1} \frac{-m(m-1) q^{m-2} - m^2(m-1) q^{m-2} + m^2(m+1) q^{m-1}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[-m(m-1) - m^2(m-1) + m^2(m+1)\right] \\
&= \frac{m^2 + m}{2}.
\end{aligned}$$

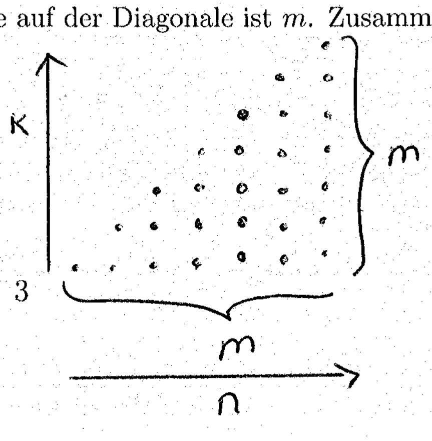
Wir finden deshalb, dass

$$\sum_{n=1}^{m} n = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Der zweite Lösungsweg schreibt die Summe zuerst als eine doppelte Summe:

$$\sum_{n=1}^{m} n = \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} 1.$$

Dies ist eine zweidimensionale Summe, und sie gleicht der Zahl der Gitterpunkte in der Figur. Diese Zahl lässt sich leicht berechnen: Die Zahl der Gittepunkte unterhalt der Diagonale ist $m(m-1)/2$, und die Zahl der Gitterpunkte auf der Diagonale ist m. Zusammen gibt dass dann $m(m+1)/2$ Gitterpunkte.



(c) $\sum_{n=1}^{m} n(n-1)$.

Die Lösung ist weitgehend identisch zu (b), nur muss zweimal differentiert werden:

$$\sum_{n=1}^{m} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2 - m(m+1)q^{m-1} + 2(m^2-1)q^m - m(m-1)q^{m+1}}{(1-q)^3}. \tag{1}$$

Grenzwert $q \to 1$ berechnen mit der l'Hôpitalsche Regel gibt

$$\sum_{n=1}^{m} n(n-1) = \frac{1}{3}(m-1)m(m+1).$$

Als alternativer Lösungsweg ein Argument aus der Kombinatorik: Man möchte 3 Kugeln aus $m+1$ Kugeln ziehen. Man zählt die Zahl der Möglichkeiten (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) so auf: Die Kugeln werden mit den Zahlen $1, 2, \ldots, m+1$ beschriftet. Sei $n+1$ die höchste Zahl der drei ausgewählten Kugeln. Dann gibt es für die anderen beiden Kugeln noch $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten sie aus zu wählen (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge). Die Gesamtzahl Z der Möglichkeiten drei Kugeln aus insgesamt $m+1$ Kugeln zu ziehen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, ist daher

$$Z = \sum_{n=1}^{m} \binom{n}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} n(n-1).$$

In Aufgabe 8a haben wir gesehen, dass

$$Z = \binom{m+1}{3} = \frac{(m+1)m(m-1)}{6}.$$

Daraus folgt, dass

$$\sum_{n=1}^{m} n(n-1) = \frac{(m+1)m(m-1)}{3}.$$