

Blatt 4

Aufgabe 1

a)

$$\begin{aligned}f'(x) &= 4(1-3x^2)^3(0-6x) \\ &= -24x(1-3x^2)^3\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2}(x^2-5x+2)^{-\frac{1}{2}}(2-5) \\ &= \frac{(2x-5)}{2\sqrt{x^2-5x+2}}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}f(x) &= (1-x)x^{-\frac{1}{2}} \\ &= x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-1)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}(x+1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}(x-1)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}f(x) &= (\sqrt{x}-1)^{-1} \\ f'(x) &= -(\sqrt{x}-1)^{-2}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned}f(-x) &= -f(x) \\ f'(x) &= 1-x^{-2} \\ f''(x) &= 2x^{-3}\end{aligned}$$

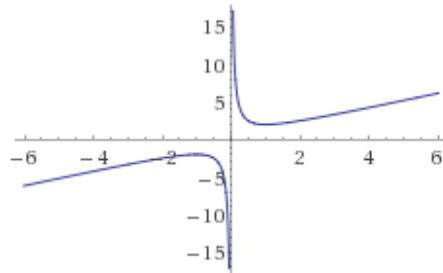


Figure 1: Skizze 2a

Extrema bei $0 = 1 - x^{-2} \Rightarrow x = \pm 1$, $f''(1) = 2 > 0$: Minimum bei 1. Maximum bei -1 wegen Symmetrie. Außerdem $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 1$.

b)

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) - (x + 2)2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^3 + 6x^2 - 3x - 2)}{(x^2 + 1)^3}$$

Extrema bei $0 = x^2 + 4x - 1 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{5}$, $f''(-2 + \sqrt{5}) < 0$: Maximum, $f''(-2 - \sqrt{5}) > 0$: Minimum. Außerdem $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm 0$.

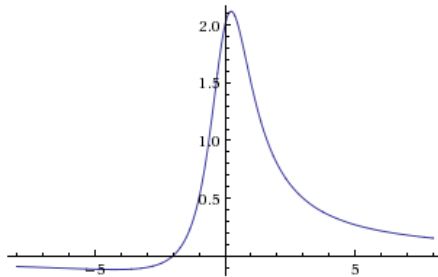


Figure 2: Skizze 2b

c)

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}}$$

Extrema bei $0 = x$, $f''(0) > 0$: Minimum. Außerdem $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = \pm 1$.

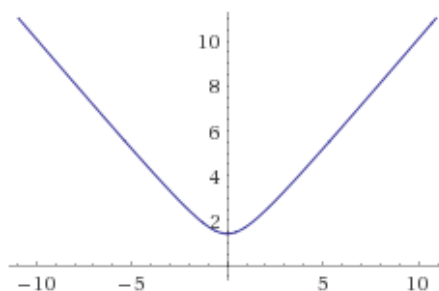


Figure 3: Skizze 2c

Aufgabe 3

a)

$$f'(x) = 2 \cos(2x)$$

b)

$$f'(x) = 2x \cos(x^2)$$

c)

$$f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

d)

$$f'(x) = -\cos[a \cos(bx)] ab \sin(bx)$$

e)

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin(x) + 1)^{-1} \\ f'(x) &= -(\sin(x) + 1) \cos(x) \end{aligned}$$

f)

$$f'(x) = e^{-\sin(x)} \cos(x)$$

Aufgabe 4

a)

$$f(x) = x^2 e^{-x}; \quad f'(x) = -e^{-x}(x^2 - 2x)$$

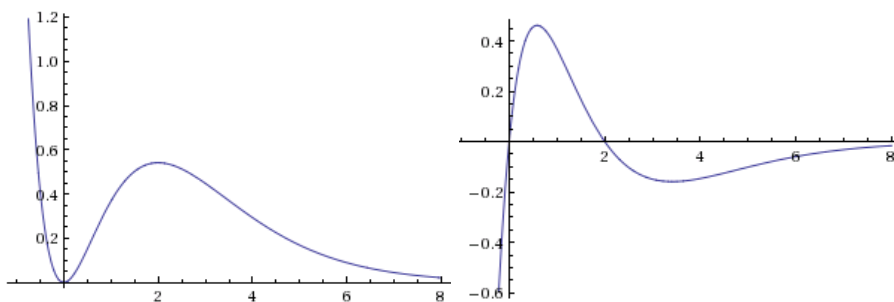


Figure 4: Skizze 4a, $f(x)$ und $f'(x)$

b)

$$f(x) = e^{-ax^2}; \quad f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

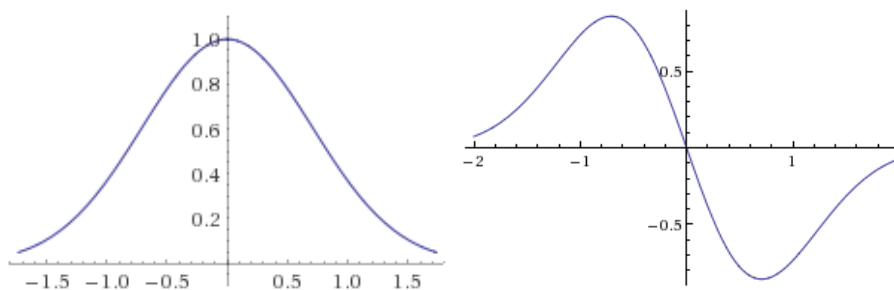


Figure 5: Skizze 4b, $f(x)$ und $f'(x)$ für $a = 1$

c)

$$f(x) = \frac{1}{e^x + 1}; \quad f'(x) = -\frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$$

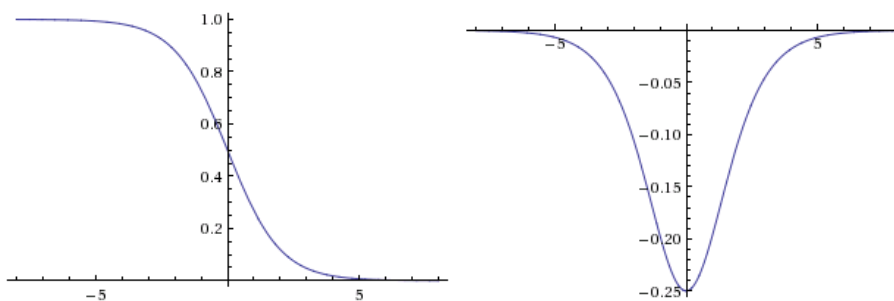


Figure 6: Skizze 4c, $f(x)$ und $f'(x)$

Aufgabe 5

a)

$$f(x) = x \ln x; \quad f'(x) = \ln x + 1; \quad f''(x) = \frac{1}{x}$$

Die Funktion hat Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 1$ und ein Minimum ($f''(e^{-1}) = e > 0$) bei $x = \frac{1}{e}$, da $f'(e^{-1}) = 0$. Für kleine x geht sie gegen 0 , für große x gegen $+\infty$.

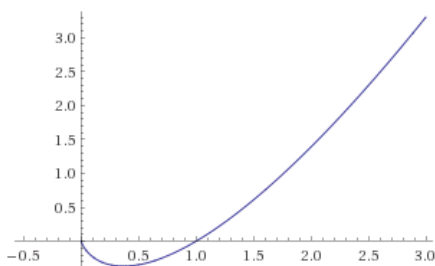


Figure 7: Skizze 5a

b)

$$f(x) = \ln \frac{x}{(x+1)^2}; \quad f'(x) = \frac{1-x}{x(x+1)}; \quad f''(x) = \frac{-3x^2+1}{x^2(x+1)^2}$$

Die Funktion hat keine Nullstellen, aber ein Maximum ($f''(1) = -\frac{1}{2}$) bei $x = 1$, da $f'(1) = 0$. Sowohl für kleine, als auch für große x geht die Funktion gegen $-\infty$.

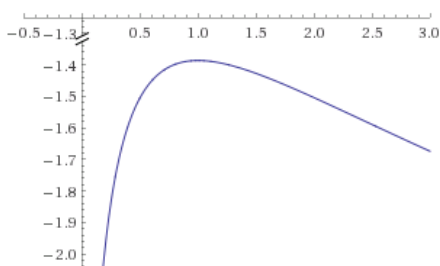


Figure 8: Skizze 5b

Aufgabe 6

$$\begin{aligned}(x^n)' &= (e^{n \ln(x)})' \\ &= e^{n \ln(x)} n \frac{1}{x} \\ &= x^n n \frac{1}{x} \\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

Das Umschreiben funktioniert natürlich nicht bei $x = 0$, weil der \ln dort nicht existiert. Wie sich leicht überprüfen lässt gilt der Zusammenhang aber auch dort:

$$(0^n)' = 0 = n0^{n-1}.$$

Aufgabe 7

a) Wir nutzen aus, dass $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ Ableitungen voneinander sind. Weiterhin verwenden wir $\sinh^2(x) + 1 = \cosh^2(x)$.

$$\begin{aligned}(\operatorname{arsinh}(x))' &= \frac{1}{\sinh'[\operatorname{arsinh}(x)]} \\ &= \frac{1}{\cosh[\operatorname{arsinh}(x)]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2[\operatorname{arsinh}(x)]}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\operatorname{arcosh}(x))' &= \frac{1}{\cosh'[\operatorname{arcosh}(x)]} \\ &= \frac{1}{\sinh[\operatorname{arcosh}(x)]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2[\operatorname{arcosh}(x)] - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}x &= \tanh [\operatorname{artanh}(x)] \\&= \frac{e^{\operatorname{artanh}(x)} - e^{-\operatorname{artanh}(x)}}{e^{\operatorname{artanh}(x)} + e^{-\operatorname{artanh}(x)}} \\&= \frac{e^{2\operatorname{artanh}(x)} - 1}{e^{2\operatorname{artanh}(x)} + 1} \\e^{2\operatorname{artanh}(x)} &= \frac{1+x}{1-x} \\ \operatorname{artanh}(x) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ (\operatorname{artanh}(x))' &= \frac{1}{2} \frac{1-x}{1+x} \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-1}{x^2-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \coth [\operatorname{arcoth}(x)] \\&= \frac{e^{\operatorname{arcoth}(x)} + e^{-\operatorname{arcoth}(x)}}{e^{\operatorname{arcoth}(x)} - e^{-\operatorname{arcoth}(x)}} \\&= \frac{e^{2\operatorname{arcoth}(x)} + 1}{e^{2\operatorname{arcoth}(x)} - 1} \\e^{2\operatorname{arcoth}(x)} &= \frac{x+1}{x-1} \\ \operatorname{arcoth}(x) &= -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\ (\operatorname{arcoth}(x))' &= -\frac{1}{2} \frac{x+1}{x-1} \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-1}{x^2-1}\end{aligned}$$

Aufgabe 8

a)

$$\begin{aligned}x^x &= e^{\ln(x^x)} \\ &= e^{x \ln(x)} \\ (x^x)' &= e^{x \ln(x)} \left(\ln(x) + x \frac{1}{x} \right) \\ &= x^x (\ln(x) + 1)\end{aligned}$$

b)

$$(\ln(\ln(\ln(x))))' = \frac{1}{\ln(\ln(x))} \frac{1}{\ln(x)} \frac{1}{x}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{1 - 5 \cos^2(x)}{1 + 3 \cos^2(x)} &= \frac{\sin^2(x) - 4 \cos^2(x)}{\sin^2(x) + 4 \cos^2(x)} \\ \left(\arcsin \left(\frac{1 - 5 \cos^2(x)}{1 + 3 \cos^2(x)} \right) \right)' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin^2(x) - 4 \cos^2(x)}{\sin^2(x) + 4 \cos^2(x)} \right)^2}} \left(\frac{\sin^2(x) - 4 \cos^2(x)}{\sin^2(x) + 4 \cos^2(x)} \right)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{16 \sin^2(x) \cos^2(x)}{(\sin^2(x) + 4 \cos^2(x))^2}}} \left(\frac{\tan^2(x) - 4}{\tan^2(x) + 4} \right)' \\ &= \frac{\sin^2(x) + 4 \cos^2(x)}{4 \sin(x) \cos(x)} \frac{16 \tan(x)}{\cos^2(x) (\tan^2(x) + 4)^2} \\ &= \frac{4 \tan(x)}{\sin(x) \cos(x) (\tan^2(x) + 4)} \\ &= \frac{4}{1 + 3 \cos^2(x)}\end{aligned}$$