Übungsblatt 7 Brückenkurs WS 15/16

Aufgabe 1:

Zeichnen Sie vier beliebige Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, und $\mathbf{d}$ in der Ebene, und bestimmen Sie die Vektoren:
a) $\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - (\mathbf{c} - \mathbf{d})$, b) $\mathbf{y} = \mathbf{c} - (\mathbf{a} + \mathbf{d} - \mathbf{b})$, c) $\mathbf{z} = \mathbf{b} - (\mathbf{a} - \mathbf{d}) + \mathbf{c}$

Aufgabe 2

(a) Gegeben seinen zwei Vektoren $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ und $(\mathbf{a}-\mathbf{b})$. Wann stehen beide Vektoren senkrecht aufeinander?

(b) Drücken Sie $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ (die Fläche des durch $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms) durch Skalarprodukte aus.

Aufgabe 3

(a) Bilden Sie aus $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Größen

$$\mathbf{a} + \mathbf{b},\ \mathbf{a} - \mathbf{c},\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}.$$

(b) Berechnen Sie ebenso die Winkel $\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\measuredangle(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ und $\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{c})$.

Aufgabe 4

Welcher Vektor steht senkrecht auf $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 5

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$,... seien Vektoren und $\lambda \neq 0$ ein Skalar. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a}$,

(b) $\mathbf{a} - 2\mathbf{a}$,

(c) $3\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{a}$,

(d) $\mathbf{a} + 2(\mathbf{b} - \mathbf{a})$,

(e) $\mathbf{y} = \mathbf{c} - (\mathbf{a} + \mathbf{d} - \mathbf{b})$,

(f) $\mathbf{c} - (-\mathbf{b} - \mathbf{a})$,

(g) $\lambda\mathbf{a} + 2\lambda\mathbf{b}$,

(h) $\mathbf{a} - \frac{2}{\lambda}(\lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b})$

Aufgabe 6

(a) Berechnen Sie alle Skalarprodukte zwischen den Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(b) Berechnen Sie die Länge der Vektoren aus Teil a) und die Winkel zwischen ihnen.

(c) Zwei Vektoren der Länge 2 schließen den Winkel 60° ein. Berechnen Sie ihr Skalarprodukt.

Aufgabe 7

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = a^2 - b^2$. Was ist die geometrische Bedeutung im Falle $a = b$?

(b) Zeigen Sie, dass für orthogonale Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ gilt: $|(\mathbf{a} - \mathbf{b})|^2 = a^2 + b^2$.

Aufgabe 8: Dreieck

Ein Dreieck sei durch zwei seiner Seitenvektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9/2 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Wie lang sind die drei Seiten?

(b) Wie groß sind die drei Winkel?

Aufgabe 9

Betrachten Sie das Dreieck mit den Eckpunkten $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Überprüfen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts, ob es rechtwinklig ist.