Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2017/2018 Blatt 13

Abgabetermin: Montag, 29.01.2018, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 10:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen (5+5 Punkte)

(a) Geben Sie für die folgenden Kräfte jeweils ein Potential an:

$$F(x) = F_0 \sinh(\kappa x); \qquad F(x) = ax^2 - bx \ . \tag{1}$$

.

(b) Geben Sie die Drehmatrizen für Drehungen um $\pi/6$, $\pi/3$, $\pi/2$ und π in der xy-Ebene an.

(c) Leiten Sie mithilfe von Drehmatrizen die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus ab.

Aufgabe 2: Volumenintegral (5+5 Punkte)

Betrachten Sie einen Stein der Masse m in einem Bohrloch, das sich von einem Punkt auf der (homogenen und kugelförmigen) Erde durch den Erdmittelpunkt bis zu seinem Antipoden erstreckt.

(a) Zeigen Sie, dass die potentielle Energie des Steins die Form

$$V(z) = \frac{1}{2} GMm \frac{z^2}{R^3} - \frac{3}{2} GMm \frac{1}{R} \tag{2}$$

annimmt, indem Sie ein entsprechendes Volumenintegral in einem geeigneten Koordinatensystem explizit berechnen. Hier sind M und R die Masse und der Radius der Erde, und $-R < z < R$ bezeichnet den Ort des Steins im Bohrloch mit $z = 0$ im Erdmittelpunkt.

(b) Sie lassen den Stein von der Erdoberfläche in das Bohrloch fallen. Geben Sie eine explizite Lösung für die Bewegung des Steins als Funktion der Zeit an. Wie lange braucht der Stein bis zum Antipoden (Zahlenwert)?

Aufgabe 3: Tennis (10 Punkte)

Wenn Sie schon einmal Tennis gespielt haben, so wissen Sie, dass Ihr Kraftaufwand beim Schlagen des Balles stark davon abhängt, an welcher Stelle der Ball den Schläger trifft. In dieser Aufgabe soll der Tennisschläger durch einen homogenen Stab der Länge L repräsentiert werden. Dieser Stab werde im Abstand x vom (sagen wir dem linken) Ende des Stabes kurz von einem Ball getroffen. In welchem Abstand x muss dies geschehen, damit das linke Ende des Stabes anfangs in Ruhe bleibt. (Wenn Sie den Stab in der Hand hielten, müssten Sie in diesem Fall nur die auf den Stab wirkende Schwerkraft ausgleichen, aber keinen Rückstoß aufgrund des Ballkontakts auffangen.)

Aufgabe 4: Trägheitstensor eines homogenen Würfels (10 Punkte)

Betrachten Sie den Trägheitstensor einer homogenen Kugel um den Mittelpunkt und damit den Schwerpunkt. Aufgrund der Rotationssymmetrie muss dieser Tensor für alle Koordinatensysteme mit Ursprung im Mittelpunkt das gleiche Resultat geben. In der Tat können sie sich leicht davon überzeugen, dass der Trägheitstensor einer Kugel in all diesen Koordinatensystemen proportional zur Einheitsmatrix ist und sich damit bei Rotationen des Koordinatensystems nicht ändert. Denn wie wir in der Vorlesung gesehen haben, transformiert sich der Tensor J unter Drehungen D des Koordinatensystems wie $J' = DJD^T$. Ist $J = J_0\mathbf{1}$ proportional zur Einheitsmatrix $\mathbf{1}$, so ist $J' = J_0 D\mathbf{1}D^T = J_0 DD^T = J_0\mathbf{1} = J$, da die Drehmatrizen die Identität $DD^T = \mathbf{1}$ erfüllen. ($J_0 = (2/5)MR^2$ ist das Trägheitsmoment einer Kugel um den Mittelpunkt.)

In dieser Aufgabe sollen Sie nun den Trägheitstensor eines homogenen Würfels um den Mittelpunkt und damit den Schwerpunkt betrachten. Ein Würfel ist auch ziemlich symmetrisch, aber lange nicht so symmetrisch wie eine Kugel. Geben Sie den Trägheitstensor eines homogenen Würfels um seinen Schwerpunkt in allen möglichen Koordinatensystemen an. Der Würfel habe die Kantenlänge R und die Masse M.